ΜΑΘΗΜΑ 7

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ 1}}$ (Κριτήριο λόγου / D'Alembert).

Έστω (a_n) με $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε:

(i) Αν $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$.

(ii) Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

__Απόδ__ (i) $\ell > 1 \Rightarrow \varepsilon := \frac{\ell - 1}{2} > 0$

$1 \qquad \ell-\varepsilon \qquad \ell \qquad \ell+\varepsilon$

$\frac{\ell+1}{2} = \ell - \varepsilon = 1 + \varepsilon$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon = \frac{\ell+1}{2} > 1$.

Οπότε:

$a_{n_0+1} > \frac{\ell+1}{2} \cdot a_{n_0}$,

$a_{n_0+2} > \frac{\ell+1}{2} a_{n_0+1} > \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$ και, επαγωγικά,

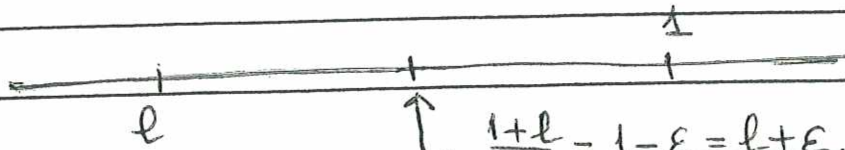
$a_{n_0+k} > \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k \cdot a_{n_0} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0: \quad a_n > \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \cdot a_{n_0} =$

$$= \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n}}_{\downarrow\, +\infty} \cdot \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{-n_0} \cdot a_{n_0}}_{\mathbb{R} \ni \alpha > 0}$$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$

(ii) $\ell < 1 \Rightarrow \varepsilon := \dfrac{1-\ell}{2} > 0.$



$\dfrac{1+\ell}{2} = 1-\varepsilon = \ell+\varepsilon.$

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \ell \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \ell+\varepsilon < 1$

Οπότε:

$0 < |a_{n_0+1}| < \dfrac{1+\ell}{2} \cdot |a_{n_0}|,$

$0 < |a_{n_0+2}| < \dfrac{1+\ell}{2} \cdot |a_{n_0+1}| < \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^2 \cdot |a_{n_0}|$

και, επαγωγικά, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$0 < |a_{n_0+k}| < \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^k \cdot |a_{n_0}|$, ή, ισοδύναμα

$\forall n \geq n_0$:

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} < |a_n| < \underset{\downarrow \atop 0}{\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n} \cdot \underbrace{\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{-n_0} \cdot |a_{n_0}|}_{x \in \mathbb{R}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0.$ ■

Προσοχή! Στο (i) αν δεν είναι $a_n > 0$ (αλλά $a_n < 0$), τότε $a_n \to -\infty$.

Επίσης, αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ δεν βγαίνει συμπέρασμα:

π.χ.:

$a_n = 1/n \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1/n+1}{1/n} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \dfrac{1}{1+0} = 1$

με $a_n \to 0$.

$\beta_n = n \to +\infty$, και $\beta_{n+1}/\beta_n = \dfrac{n+1}{n} = 1+\dfrac{1}{n} \to 1+0 = 1.$

$\gamma_n = 1+\dfrac{1}{n} \to 1$, και $\gamma_{n+1}/\gamma_n \to 1.$

ΠΡΟΤΑΣΗ

(i) $a_n \geq 0$, $\mu > 1$: $a_{n+1} \geq \mu a_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$

(ii) $0 < \mu < 1$, $|a_{n+1}| \leq \mu |a_n|$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \to 0$

Απόδ. Άσκηση!

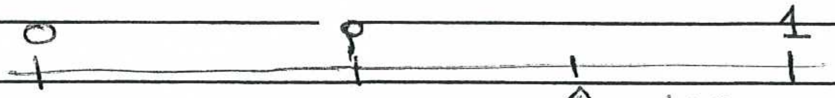
ΘΕΩΡ. 2 (Κριτήριο ρίζας / Cauchy)

Έστω (a_n) με $a_n \geq 0$. Τότε:

(i) $\sqrt[n]{a_n} \to \rho < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

(ii) $\sqrt[n]{a_n} \to \rho > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$.

Απόδ. (i) Για $\rho < 1$, θέτουμε $\varepsilon := \frac{1-\rho}{2} > 0$

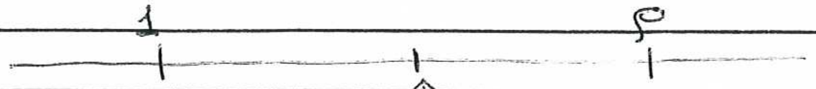


$\frac{1+\rho}{2} = \rho + \varepsilon = 1 - \varepsilon$.

$\sqrt[n]{a_n} \to \rho \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \rho + \varepsilon < 1$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq a_n < \underset{\downarrow \atop 0}{(\rho+\varepsilon)^n} \Rightarrow a_n \to 0$.

(ii) Για $\rho > 1$, θέτουμε $\varepsilon : \frac{\rho - 1}{2} > 0$



$\frac{1+\rho}{2} = 1 + \varepsilon = \rho - \varepsilon$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} > \rho - \varepsilon \Rightarrow a_n > \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$. ∎

Προσοχή! Αν $\rho = 1$, δεν γνωρίζουμε πώς συμπεριφέρεται η (a_n). Πχ:

$a_n = 1/n \to 0$, με $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1$.

$\beta_n = 1 = $ σταθ, με $\sqrt[n]{\beta_n} = \sqrt[n]{1} \to 1$.

$\gamma_n = n \to +\infty$, με $\sqrt[n]{\gamma_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω (a_n) με $a_n \geq 0$.

(i) Αν $\exists\, \rho \in \mathbb{R}$ με $0 < \rho < 1$: $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \to 0$.

(ii) Αν $\exists\, \rho > 1$: $\sqrt[n]{a_n} \geq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \to +\infty$.

Απόδ. Άσκηση!

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Υπενθυμίζουμε ότι:

$(a_n) \uparrow \iff a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n) \uparrow$ (γνησίως) $\iff a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n) \downarrow \iff a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n) \downarrow$ (γνησίως) $\iff a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Παρατηρούμε ότι:

$(a_n) \uparrow \iff \forall\, n > m : a_n \geq a_m$.

Πράγματι:

Εστω $(a_n) \uparrow$ και $n > m$. Θδο $a_n \geq a_m$.

Επειδή $n > m \iff \exists\, k \in \mathbb{N} : n = m + k$, αρκεί νδο $a_{m+k} \geq a_m$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Με επαγωγή: $a_{n+1} \geq a_n$ (από ορσ.).

Αν $a_{n+k} \geq a_n \Rightarrow a_{n+(k+1)} \geq a_{n+k} \geq a_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{n+(k+1)} \geq a_n.$$

Ανάλογα για (a_n) $\uparrow$, $\downarrow$, $\downarrow$.

Επίσης παρατηρούμε ότι:

$(a_n) \uparrow \Rightarrow (a_n)$ κάτω φραγμ. από a_1.

$(a_n) \downarrow \Rightarrow (a_n)$ άνω φραγμ. από a_1.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε ακολουθία μονότονη και φραγμένη είναι συγκλίνουσα.

Απόδ. Εστω $(a_n) \uparrow$.

Το σύνολο των εικόνων $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι $\neq \emptyset$ και φραγμένο, άρα $\exists \sup A = a \in \mathbb{R}$.

Θδο $a = \lim a_n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$a - \varepsilon < a \Rightarrow a - \varepsilon$ όχι άνω φρ. του $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Άρα $a_n \to a$. ∎

Σχέση σύγκλισης - φραγμάτων:

(1) $a_n \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_n)$ φραγμένη

(2) $a_n \to +\infty \Rightarrow (a_n)$ όχι άνω φραγμένη.
(είναι κάτω φραγμ.)

(3) $a_n \to -\infty \Rightarrow (a_n)$ όχι κάτω φραγμ.
(είναι άνω φραγμ.)

κανένα αντίστροφο δεν ισχύει:

(1) $a_n = (-1)^n$ φραγμ., όχι συγκλίνουσα

(2) $a_n = (0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, \dots)$ όχι άνω φραγμ.,
αλλά $a_n \not\to +\infty$.

(3) $a_n = (0, -2, 0, -4, 0, -6, \dots)$ όχι κάτω φραγμ.,
αλλά $a_n \not\to -\infty$.

Σχέση σύγκλισης - μονοτονίας:

--- ΟΛΕΣ οι μονότονες συγκλίνουν ή τείνουν:

(4) μονότονη + φραγμένη $\Rightarrow$ συγκλίνει (σε $a \in \mathbb{R}$)

(5) $(a_n)\uparrow$ όχι άνω φραγμ. $\Rightarrow a_n \to +\infty$

(6) $(a_n)\downarrow$ όχι κάτω φραγμ $\Rightarrow a_n \to -\infty$

κανένα αντίστροφο δεν ισχύει:

(4) $(-1)^n \cdot 1/n \to 0$, όχι μονότονη

(5) $(a_n) = (2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \dots) \to +\infty$, όχι $\uparrow$.

(6) $(a_n) = (-2, -1, -4, -3, \dots) \to -\infty$, όχι $\downarrow$

Σχέση μονοτονίας - φραγμάτων

(7) μονότονη $\Rightarrow$ φραγμ. από μία πλευρά
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Π.χ. $a_n = (-1)^n$.

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ e

Λήμμα Έστω $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\beta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, τυχαί.
Τότε (1) $(a_n)\uparrow$ και (2) $(\beta_n)\downarrow$

Αποδ.

(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \iff$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \iff$

$\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n > \frac{n+1}{n+2} \iff$

$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1} - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}$

$= (1+a)^n \quad a = -\frac{1}{n^2+2n+1} > -1.$ Bernoulli:

$\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n > 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} = \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \overset{\circledast}{\underset{;}{>}} \frac{n+1}{n+2}$

$\circledast \iff (n^2+n+1)(n+2) > (n+1)(n^2+2n+1) = (n+1)^3$

$\iff n^3+2n^2+n^2+2n+n+2 > n^3+3n^2+3n+1 \iff$

$\iff 2>1$ ✓

(2) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \iff$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \iff$$

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > \frac{n+2}{n+1} \iff$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > \frac{n+2}{n+1}.$$

(Bern) $$\geq 1+\frac{n+1}{n^2+2n} \overset{*}{>} \frac{n+2}{n+1};$$

$$* \quad \frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} > \frac{n+2}{n+1} \iff$$

$$(n^2+3n+1)(n+1) > (n+2)(n^2+2n) \iff$$

$$n^3+n^2+3n^2+3n+n+1 > n^3+2n^2+2n^2+4n \iff$$

$$1 > 0. \quad \blacksquare$$

Πρόταση $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \in \mathbb{R}$ $\quad e := \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Αποδ. Έχουμε δείξει

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a_n)\uparrow$.

Επίσης έχουμε δείξει ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad (\beta_n) := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow$.

Προφανώς $\quad a_n = \left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \beta_n$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n < \dots < \beta_n < \dots < \beta_3 < \beta_2 < \beta_1$$

$(\alpha_n)\uparrow$ και άνω φρ. από (κάθε β_n, και από) β_1.

Άρα συγκλίνει σε αριθμό $\in \mathbb{R}$. Θέτουμε $e := \lim a_n$ ∎

Παρατ. $\quad a_1 < e < \beta_1 \Rightarrow 2 < e < 4$

Υπολογίζεται $\quad e \simeq 2.718$

Επίσης: $\quad \beta_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \beta_n \longrightarrow e \cdot (1+0) = e$

ΑΡΧΗ ΚΙΒΩΤΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

Θεωρ. Έστω $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων. Τότε

$$X := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Αν επιπλέον $b_n - a_n \to 0 \Rightarrow X$ μονοσύνολο

Απόδ. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$

Δηλ. $(a_n) \uparrow$ και φραγμ. από b_1. $\Rightarrow$

$\exists \; a := \lim a_n \in \mathbb{R} \quad (a = \sup a_n)$

$\exists \; b := \lim b_n \in \mathbb{R} \quad (b = \inf b_n)$

$a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$. Δηλ. $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_n \leq a \leq b \leq b_n, \; \forall n \in \mathbb{N}}$$

Άρα

$$[a, b] \subseteq [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [a, b] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset \quad (1)$$

Αν επιπλέον $\left.\begin{array}{l} \underbrace{b_n - a_n}_{\to\, b - a} \to 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{του ορίου}]{\text{μονοσ.}} a = b \Rightarrow [a, b] = \{a\} = \{b\}$

Θδο $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b]$.

Πράγματι: $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n, \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [a, b].$$

Δηλ. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \subseteq [a, b] \; (2)$ Άρα $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b]$ ∎

Παρατ. Συμπ. ισχύει μόνο για κλειστά διαστήματα:
$(0,1) \supseteq (0,1/2) \supseteq (0,1/3) \supseteq \dots \supseteq (0,1/n) \supseteq \dots$
$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,1/n) = \emptyset$.

Πράγματι, αν $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,1/n) \Rightarrow 0 < x < 1/n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n < \frac{1}{x} \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{x}$ άνω φρ. του $\mathbb{N}$, άτοπο.

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Δίνονται με αναδρομικό ορισμό:
$a_1 = a \qquad a_{n+1} = f(a_n)$
(ο ορισμός γίνεται επαγωγικά).

Συνήθως μονότονη + φραγμ. (ή μη φραγμ.)
Το όριο από εξίσωση.

Παραδείγματα:

① $a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι:
$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > a_1, \quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} > a_2$
Έστω $a_{n+1} > a_n$. Θδο $a_{n+2} > a_{n+1}$.
Πράγματι:

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow \underbrace{2+a_{n+1}}_{>0} > \underbrace{2+a_n}_{>0} \Rightarrow \sqrt{2+a_{n+1}} > \sqrt{2+a_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+2} > a_n$. Άρα $(a_n)\uparrow$.

Επίσης παρατηρούμε ότι, αφού η (a_n) είναι μονότονη,

(a_n) φραγμ. $\iff \exists \lim a_n = x \in \mathbb{R}$

(a_n) όχι φραγμ. $\iff a_n \to +\infty$

Ισχύει ότι $a_1 < 2$.

Έστω $a_n < 2 \Rightarrow a_n + 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{2+a_n} < \sqrt{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} < 2$.

Επομένως $0 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, δηλ.

(a_n) φραγμ.

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n} =$

$\Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+\lim a_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\text{απορρ.}}{x=-1}$ ή $x = 2$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n+1}{a_n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε $a_2 = 3/2 > 1, \quad a_3 = 8/5 > 3/2 = a_2$.

Επίσης:

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n+1}{a_n+1} > a_n \iff 2a_n + 1 > a_n^2 + a_n \iff$

$\iff a_n^2 - a_n - 1 < 0 \iff$

$\iff \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < a_n < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\underset{(a_n > 0)}{\iff} 0 < a_n < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Θδο $0 < a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, επαγωγικά:

για $n=1 \Rightarrow a_1 = 1$ ισχύει.

Έστω $0 < a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$$0 < a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 4a_n + 2 < a_n + 1 + \sqrt{5}a_n + \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (3-\sqrt{5})a_n < \sqrt{5} - 2 + 1 = \sqrt{5} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < a_n < \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{4} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \checkmark$$

Άρα $(a_n) \uparrow$ και συγχρόνως (a_n) άνω φρ. από $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\Rightarrow a_n \to x \in \mathbb{R}$

$a_{n+1} \nearrow$

$$x = \frac{2x+1}{x+1} \Rightarrow x^2 + x = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \ \blacksquare$$