ΜΑΘΗΜΑ 8

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΣ $X, Y \neq \emptyset$ Συνάρτηση από X στο Y είναι μια σχέση από το X στο Y ($: f \subseteq X \times Y$) :

$\forall x \in X \ \exists ! \ y \in Y$ με $(x, y) \in f$.

Γράφουμε $f : X \to Y$, $f(x) = y$.

X = πεδίο ορσ., Y = πεδίο τιμών $f(X)$ = εικόνα.

ΟΡΣ $f : X \to Y$ 1-1 $\iff [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

$\iff [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$.

$f : X \to Y$ επί $\iff \forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$

$\iff f(X) = Y$.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$, x = άγνωστος, y = παράμετρος

Αν $f(x) = y$ έχει λύση για κάθε $y \Rightarrow f$ επί.

Αν, όταν υπάρχουν λύσεις, είναι μοναδικές $\Rightarrow f$ 1-1.

ΟΡΣ $f : X \to Y$, $g : W \to Z$ με $f(X) \subseteq W$. Τότε

$\exists \ g \circ f : X \to Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

που λέγεται σύνθεση των f, g.

ΟΡΣ $f : X \to Y$

(i) $\forall A \subseteq X$ εικόνα του A $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$

(ii) $\forall B \subseteq Y$ αντίστροφη εικόνα του B:

$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

$\boxed{\text{Παρατήρηση!}}$ $\exists f^{-1}(B)$, ακόμη και όταν $\not\exists f^{-1}$

Πρόταση 1 $f: X \to Y$

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(ii) $A_1, A_2 \subseteq X \Rightarrow f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ και

$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(iii) $A \subseteq X \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Πρόταση 2. $f: X \to Y$

(i) $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

(ii) $B_1, B_2 \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

και $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(iii) $B \subseteq Y \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(iv) $B \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ $f: X \to Y$ συνάρτηση 1-1. Μπορεί να θεωρηθεί και επί του $f(X)$. Τότε $\forall y \in f(X)$ $\exists!\, x \in X$: $f(x) = y$.

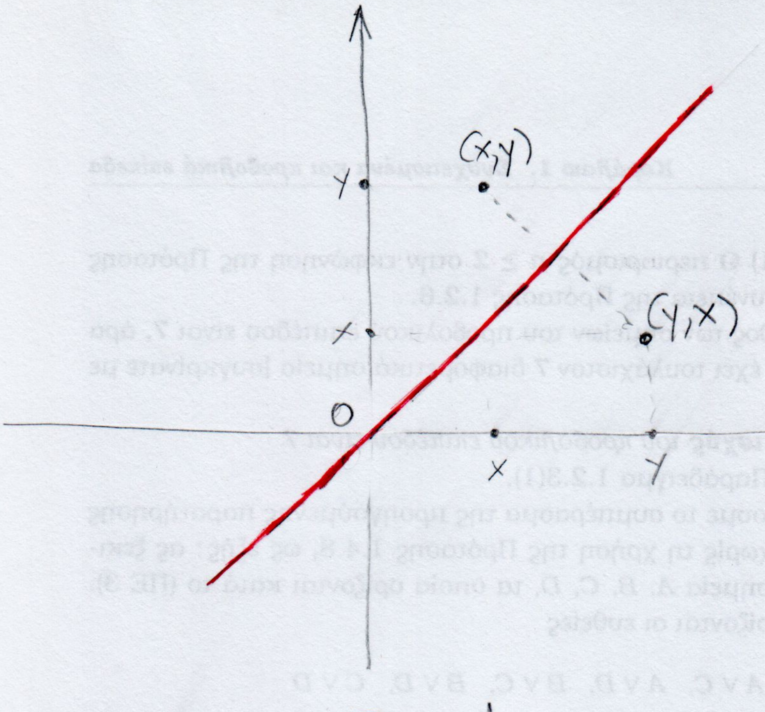
$f^{-1}(y) = x$

Η f^{-1} είναι καλά ορ. συνάρτηση : $f(X) \to X$ και λέγεται αντίστροφη της f. (Συμμετρία: Βλ. Σχήμα 1)

Πρόταση $f: X \to Y$ 1-1. Τότε

(i) $\exists f^{-1} \circ f : X \to X$ και $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $\forall x \in X$.

(ii) $\exists f \circ f^{-1} : f(X) \to f(X)$ και $f \circ f^{-1}(y) = y$, $\forall y \in f(X)$



Σχ. 1

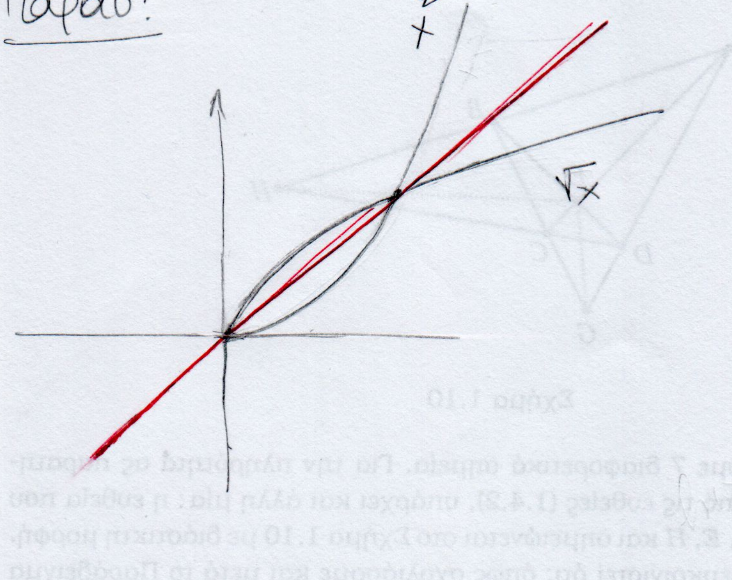
$f(x)=y \Rightarrow (x,y)\in f$

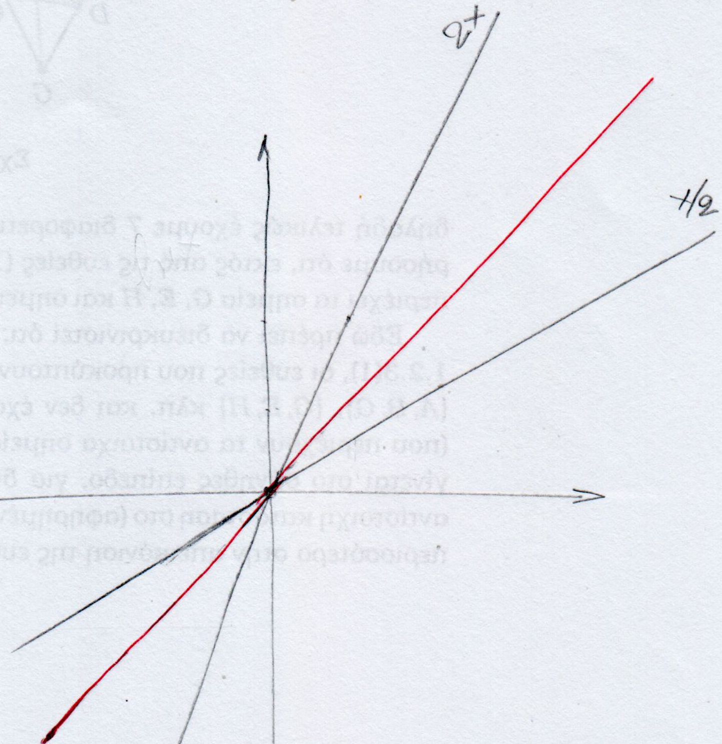
$f^{-1}(y)=x \Rightarrow (y,x)\in f^{-1}$

$(x,y),\ (y,x)$

συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο.

Παραδ:





$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ $f,g: \underset{\neq\emptyset}{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζονται:

$\underline{f+g}: A \to \mathbb{R}: (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$\underline{\lambda f}: A \longrightarrow \mathbb{R}: (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$\underline{fg}: A \longrightarrow \mathbb{R}: (fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$

$\underline{f/g}: A \longrightarrow \mathbb{R}: (f/g)(x) = f(x)/g(x)$ (για $g(x)\neq 0$, $\forall x\in A$).

Επίσης, λέμε $\underline{f\leq g} \iff f(x) \leq g(x), \ \forall \ x\in A$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Η f λέγεται:

(i) <u>αύξουσα</u> $(f\uparrow) \iff [x,y\in A \text{ με } x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y)]$.

(ii) <u>γνησίως αύξουσα</u> $(f \Uparrow) \iff$
$[x,y \in A \text{ με } x<y \Rightarrow f(x)<f(y)]$.

(iii) <u>φθίνουσα</u> $(f\downarrow) \iff [x,y\in A \text{ με } x<y \Rightarrow f(x)\geq f(y)]$

(iv) <u>γνησίως φθίνουσα</u> $(f\Downarrow) \iff$
$[x,y\in A \text{ με } x<y \Rightarrow f(x)>f(y)]$.

(v) <u>μονότονη</u>, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

(vi) <u>γνησίως μονότονη</u>, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

<u>ΕΡΩΤ.</u> $f(x)=1/x$ 1-1; επί; μονότονη;

$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ Μια $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται <u>φραγμένη</u> $\iff$
$\iff \exists\ m, M \in \mathbb{R}: m \leq f(x) \leq M \quad \forall\ x\in A \iff$
$\iff \exists\ N>0: \ |f(x)| \leq N, \ \forall x\in A$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ <u>άρτια</u> $\iff f(x)=f(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

<u>περιττή</u> $\iff f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Π.χ.: x^2, x^4, $|x|$, $\cos x$: άρτιες (Συμμετρία: βλ. Σχ.2)

x, x^3, $\sin x$: περιττές (—"— Σχ.3)

<u>Παρατ.</u> Ο ορσ. άρτιων/περιττών συναρτήσεων μπορεί να επεκταθεί για συναρτήσεις με π.ο. $A\subseteq\mathbb{R}$ που είναι <u>συμμετρικό</u> ως προς το $0\in\mathbb{R}$, δηλ. όταν

$$x\in A \iff -x\in A.$$

π.χ. $f(x)=1/x$, $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ <u>περιοδική με περίοδο Τ</u>, αν $\exists\, T\neq 0$:

$f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Π.χ: $\cos x$, $\sin x$, με περίοδο $T=2\pi$.

$x-[x]$, με $T=1$.

<u>Παραδείγματα</u> <u>συναρτήσεων</u>:

(1) Ακολουθίες: $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$

(2) Πολυωνυμικές : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

όπου $n\in\mathbb{N}$, $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$.

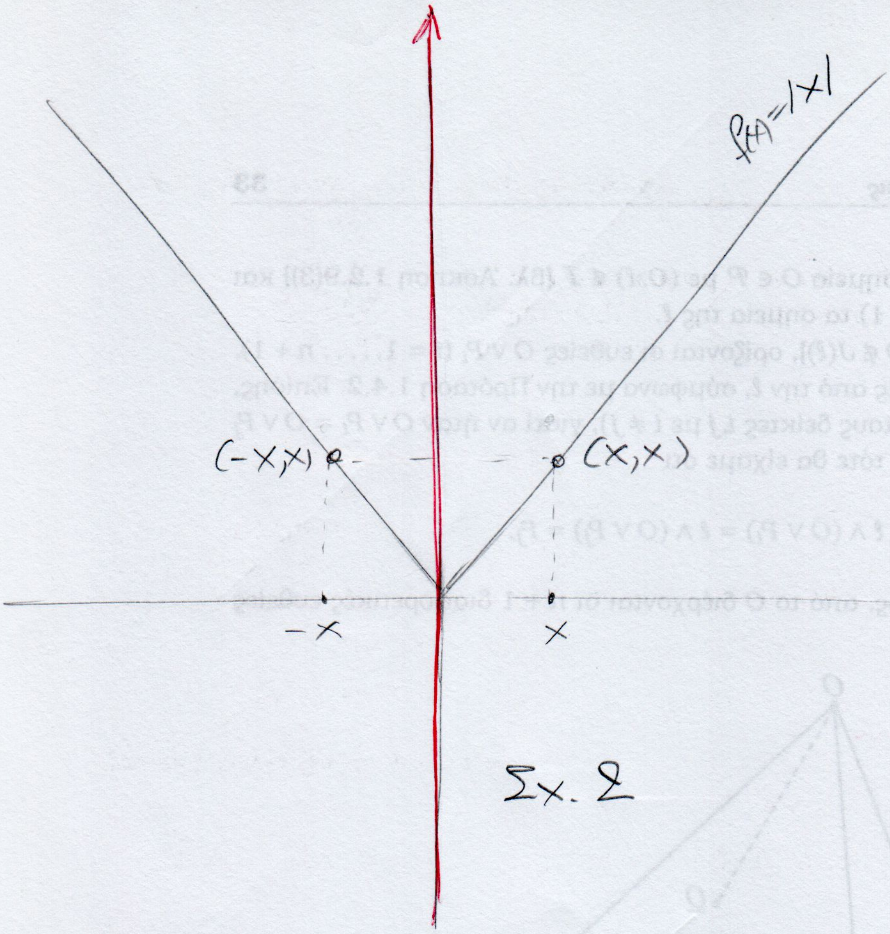
(3) Ρητές : $f(x)=p(x)/q(x)$, όπου p,q πολυωνυμικές και π.ο. της f <u>δεν</u> περιλαμβάνει ρίζες της q.

(4) Αλγεβρικές: ικανοποιούν μια εξίσ. της μορφής

$$p_0(x)+p_1(x)f(x)+p_2(x)[f(x)]^2+\dots+p_n(x)[f(x)]^n=0$$

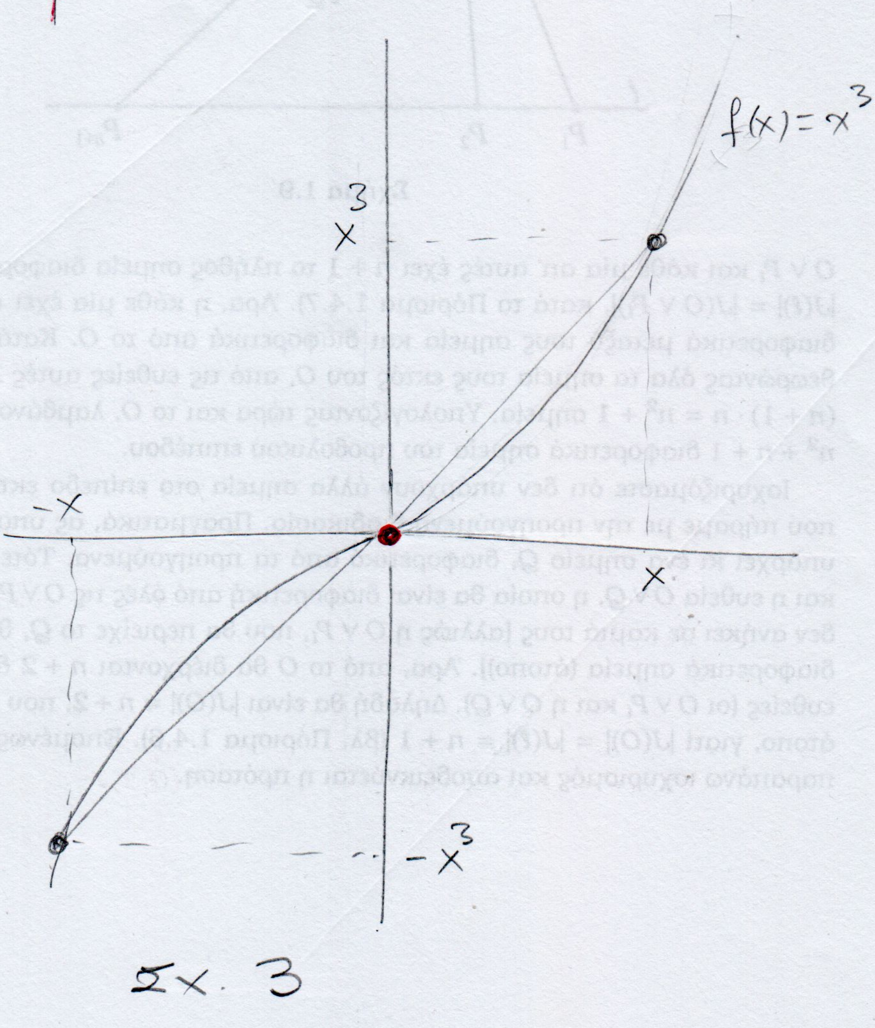
όπου $p_i(x)$ πολυωνυμικές.

$f(x)=|x|=$ άρτια: συμμετρική ως προς $y'Oy$



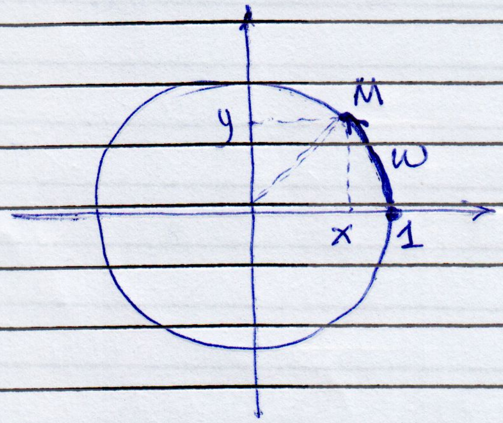
Σx. 2

$f(x)=x^3=$ περιττή: συμμετρική ως προς O



Σx. 3

(5) Τριγωνομετρικές:



$\cos\omega := x$

$\sin\omega := y$

$\tan\omega := \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$

$\cot\omega := \dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}$

ΠΡΟΤ. $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

(i) $|\sin\omega|, |\cos\omega| \leq 1$.

(ii) $\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$

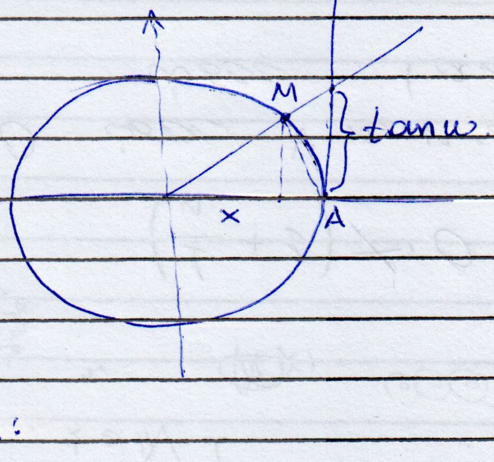
(iii) $\cos(\pi/2 - \omega) = \sin\omega$, $\sin(\pi/2 - \omega) = \cos\omega$.

(iv) $\cos(\pi - \omega) = -\cos\omega$

(v) $\cos(-\omega) = \cos\omega$, $\sin(-\omega) = -\sin\omega$.

ΠΡΟΤ. $\cos\omega$, $\sin\omega$ περιοδικές με ελάχιστο $T = 2\pi$.
$\sin\omega$ περιττή, $\cos\omega$ άρτια.

ΠΡΟΤ. $\forall\; 0 < \omega < \pi/2 : 0 < \sin\omega < \omega < \tan\omega$.



ΠΡΟΤ. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ⊛

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

ΠΟΡΙΣΜΑ $(a=b)$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

Πρόταση $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$. (*)

$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (**).

$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$

6 Εκθετική συνάρτηση

$a > 0, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow a^x = ?$

(i) $a^0 = 1$

$a^{n+1} = a \cdot a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $(x \in \mathbb{N})$

(ii) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $(x \in \mathbb{Z})$

(iii) $\exists \sqrt[n]{a}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ $(x \in \mathbb{Q})$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^{m/n} := (\sqrt[n]{a})^m$

(iv) a^x με $x \in \mathbb{R}$??

$\boxed{\text{Λήμμα}}$ (Ασκ.)

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\ (r_n)\uparrow : r_n \in \mathbb{Q}$ και $r_n \to x$. ■

Παρατ.:

$\boxed{r_1 < r_2 \in \mathbb{Q}} \xRightarrow{a>1} a^{r_1} > a^{r_2}$

$r_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad r_2 = \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow r_1 = \frac{n_2 m_1}{n_1 n_2} < r_2 = \frac{n_1 m_2}{n_1 n_2}$

$\Rightarrow n_2 m_1 < n_1 m_2 \Rightarrow a^{n_2 m_1} < a^{n_1 m_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n_1 n_2]{a^{n_2 m_1}} < \sqrt[n_1 n_2]{a^{n_1 m_2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{n_2 m_1 / n_2 n_1} < a^{n_1 m_2 / n_1 n_2} \Rightarrow \boxed{a^{r_1} < a^{r_2}}$

ΟΡΣ. $x \in \mathbb{R}, \quad a > 0$

$\left.\begin{array}{l} \exists (q_n)\uparrow : q_n \in \mathbb{Q} \text{ και } q_n \to x \\ \exists q \in \mathbb{Q} : x < q \end{array}\right\} \Rightarrow (a^{q_n})\uparrow$ και φραγμ.: $a^{q_n} < a^{q}$

$\Rightarrow a^{q_n} \to \xi \in \mathbb{R}$ θέτω $a^x = \xi$

ΕΡΩΤ. καλός ορσ ?? $\mathbb{Q} \ni q_n \to x, \quad \underset{\mathbb{Q}}{r_n} \to x \Rightarrow$

$a^{q_n} \to \xi \leftarrow a^{r_n}$??

Λήμμα (q_n) : $q_n \in \mathbb{Q}$ και $q_n \to 0 \overset{a>0}{\Longrightarrow} a^{q_n} \to 1$

Απόδ $\underset{x_n}{\sqrt[n]{a}}, \underset{y_n}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$

Έστω $\varepsilon > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_1 \quad 1-\varepsilon < y_n < 1 < 1+\varepsilon \\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_2 \quad 1-\varepsilon < 1 < x_n < 1+\varepsilon. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$:

$$1-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt[n]{a}} < 1 < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon. \quad \text{ή}$$

$$1-\varepsilon < a^{-1/n} < a^{1/n} < 1+\varepsilon.$$

$\varepsilon' := 1/n_0 > 0 \overset{q_n \to 0}{\Longrightarrow} \exists\, n_3 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_3 \quad -\varepsilon' = -1/n_0 < q_n < 1/n_0 = \varepsilon'$

Άρα : $\forall\, n \geq n_3$

$$1-\varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{q_n} < a^{1/n_0} < 1+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$a^{q_n} \to 1 \quad \blacksquare$$

Πόρισμα $r_n, q_n \in \mathbb{Q}$ και $r_n \to x$, $q_n \to x$

(q_n) όπως στον Ορισμό, (r_n) τυχαία $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^{r_n} \to \xi$.

Απόδ. $r_n \to x$, $q_n \to x \Rightarrow r_n - q_n \to 0 \Rightarrow$

$a^{r_n} = a^{r_n - q_n + q_n} = a^{r_n - q_n} \cdot a^{q_n} \to 1 \cdot \xi = \xi \quad \blacksquare$

Συμπέρασμα: Αν $\exists (q_n)$ στο $\mathbb{Q}$ με $q_n \to x \in \mathbb{R}$ και $a^{q_n} \to \xi \in \mathbb{R}$ $(a>0)$, τότε:

$\forall (r_n) \in \mathbb{Q}$ με $r_n \to x$: $a^{r_n} \to \xi$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$

(iii) $a^{-x} = 1/a^x$

(iv) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a>0$

Αν $a>1 \Rightarrow a^x \uparrow$

Αν $0<a<1 \Rightarrow a^x \downarrow$