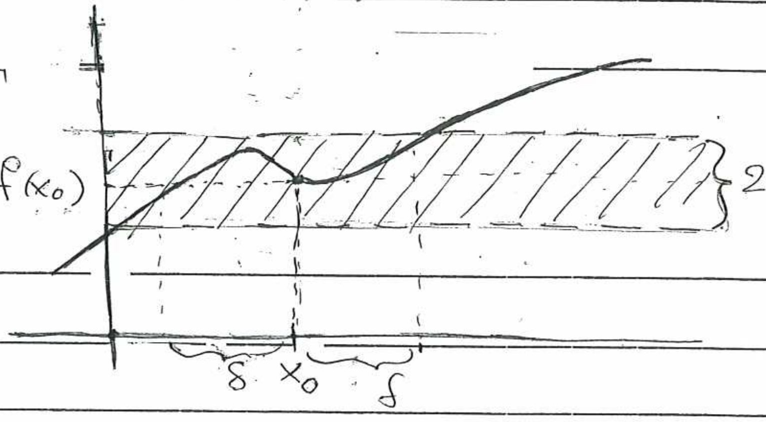
ΜΑΘΗΜΑ 9

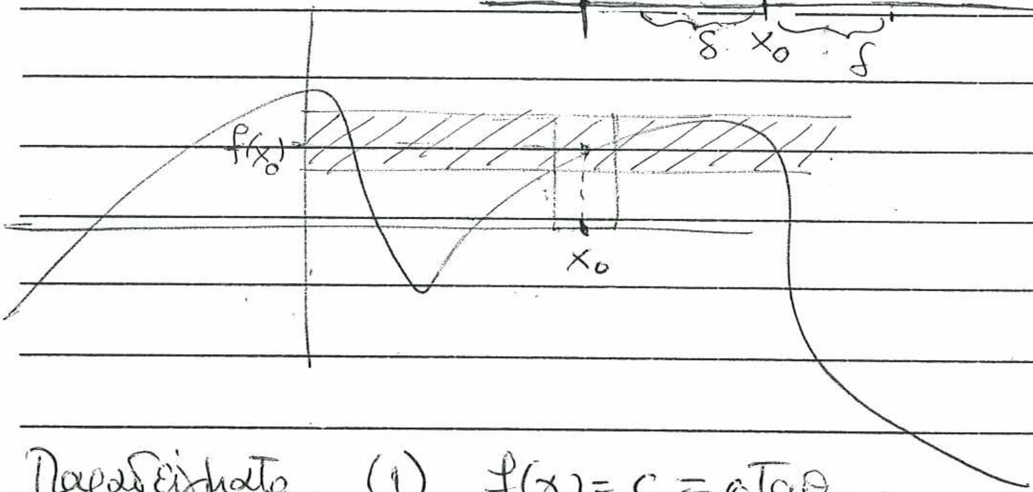
ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΟΡΣ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Λέμε ότι f συνεχής στο x_0 $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \overset{x \in A \ \&}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

f συνεχής $\Longleftrightarrow$ f συνεχής στο x, $\forall x \in A$.





Παραδείγματα (1) $f(x) = c = \sigma\tau\alpha\theta.$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Τότε: $\forall \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| =$

$$= |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

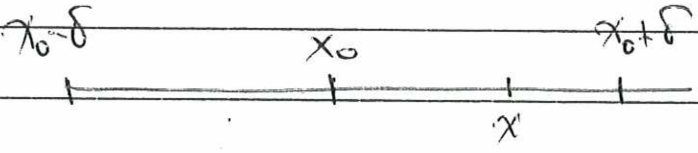
(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = x$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon$

Αρκεί $\delta = \varepsilon$.

(3) $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \underset{?}{<} \varepsilon \quad (*)$$



$|x|-|x_0| \leq |x-x_0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta + |x_0|. \Rightarrow$

$|x+x_0| \leq |x|+|x_0| \leq 2|x_0| + \delta$

(*) $|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0| \cdot |x+x_0| < \delta(2|x_0|+\delta) \leq \varepsilon$

$\delta \to 1$. $\quad \Updownarrow$

$\delta < \varepsilon / (2|x_0|+1)$.

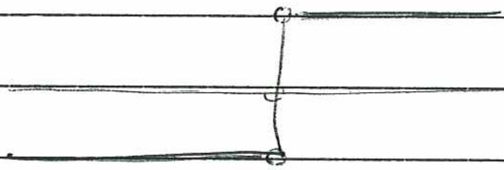
Θέτω $\delta := \min\{1, \varepsilon/(2|x_0|+1)\}$.

$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| = |x-x_0| \cdot |x+x_0| < \delta \cdot (2|x_0|+\delta) \leq$

$\leq \delta \cdot (2|x_0|+1) \leq \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1} \cdot (2|x_0|+1) = \varepsilon.$

(4) $f: \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}: \ f(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0. \end{cases}$

Είναι συνεχής.



Άρνηση του Ορσ. f όχι συνεχής στο $x_0 \Longleftrightarrow$

$\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 \ \exists x \in A$ με $|x-x_0|<\delta$ και $|f(x)-f(x_0)| > \varepsilon$.

Παράδ. Η συνάρτηση του Dirichlet:

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ είναι ασυνεχής, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Παίρνω $\varepsilon = 1/2$. Τότε $\forall \delta > 0$

— $f(x_0)=1 \Rightarrow$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\exists$ άρρητος x

$\quad x \notin \mathbb{Q} \quad \Rightarrow |x-x_0| < \delta$ και $|f(x)-f(x_0)| = 1 > 1/2 = \varepsilon$.

— $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ ανάλογα.

Αρχή της μεταφοράς

Θεωρ. $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A \iff$
$\forall (x_n)$ του A με $x_n \to x_0$, $(f(x_n)) \to f(x_0)$.

Απόδ. $(\Rightarrow)$ Έστω f συνεχής στο x_0, και έστω (x_n) του A με $x_n \to x_0$. ΘΔο $f(x_n) \to f(x_0)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. f συνεχής στο $x_0 \Rightarrow \big(\exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big)$.

Για το $\delta > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|x_n - x_0| < \delta$.

$$\Downarrow$$

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ Με άτοπο: Έστω ότι $\forall (x_n)$ του A με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$, αλλά f όχι συνεχής στο $x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$ $\exists\, x \in A : |x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

$$\Downarrow$$

για $\delta = 1/n$ $\exists\, x_n \in A$: $|x_0 - x_n| < 1/n$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_n \to x_0 \qquad f(x_n) \not\to f(x_0)$$

■

ΧΡΗΣΗ: $(+)$ f συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$; Αρκεί νδο
$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

$(-)$ f ασυνεχής στο x_0? Αρκεί νδο
$\exists\, x_n \to x_0 : f(x_n) \not\to f(x_0)$

Συνέχεια & πράξεις

ΘΕΩΡ $f, g: A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0 \in A$. Τότε:

(1) $f+g$, fg συνεχείς στο x_0.

(2) $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A \Rightarrow f/g$ συνεχής στο x_0.

Αποδ: Με Αρχή Μεταφοράς.

ΘΕΩΡ $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$, f συνεχής στο $x_0 \in A$ και g συνεχής στο $f(x_0) \in B$. Τότε $g \circ f$ συνεχής στο x_0.

Αποδ $x_n \to x_0 \Rightarrow \underset{B}{\underset{\Uparrow}{f(x_n)}} \to \underset{B}{\underset{\Uparrow}{f(x_0)}} \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$

Ερωτήσεις (1) $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}_*$ συνεχής;

(2) $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$ $\quad A = [0,1] \cup \{2\}$.
$f(2) = 2$ $\quad f$ συνεχής;

(3) $A = \mathbb{N} \Rightarrow$ κάθε (a_n): $a: A \to \mathbb{R}$
είναι συνεχής?

(4) $B = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$
$f: B \to \mathbb{R}$: $f(1/n) = 1/n^2$ συνεχής?

(5) $C = B \cup \{0\}$

$(x) = \begin{cases} x^2, & x \in B \\ c, & x = 0 \end{cases}$ συνεχής;

Πρόταση $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$.
$f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$, f συνεχής στο $x_0 \in A$, g συνεχής στο $f(x_0)$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ συνεχής στο x_0.

Απόδ. Έστω (x_n) στο A με $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$
$\Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. ∎

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΓΝΩΣΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

① c, $f(x)=x$ συνεχείς $\Rightarrow$ πολυωνυμικές & ρητές στο π.ο. τους

② ΠΡΟΤΑΣΗ $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ συνεχείς.
(άρα και $\tan$, $\cot$ συνεχείς)

Απόδ. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq$$
$$\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|.$$

Άρα, $\forall \varepsilon > 0$ παίρνοντας $\delta := \varepsilon > 0$ έχουμε
$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Επίσης
$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq$$
$$\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

& ε, δ όπως προηγουμένως. ∎

③ ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $a > 0$. Η $f_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty) : x \mapsto f_a(x) = a^x$ είναι συνεχής.

Απόδ. Έστω $a>1$

(1) Δείχνουμε ότι η f_a είναι συνεχής στο 0: Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $\sqrt[n]{a}$ και $1/\sqrt[n]{a} \to 1$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$$1-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt[n_0]{a}} = a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} = \sqrt[n_0]{a} < 1+\varepsilon.$$

Παίρνουμε $\delta := 1/n_0 > 0$. Επειδή $f_a \uparrow$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x|<\delta$ ($\Leftrightarrow -\delta < x < \delta$) έχουμε:

$$1-\varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{x} < a^{1/n_0} < 1+\varepsilon.$$

Άρα

$$|f_a(x) - f_a(0)| = |a^x - 1| < \varepsilon.$$

(2) Δείχνουμε ότι f_a συνεχής σε τυχαίο x_0: Έστω $x_n \to x_0$

$\Rightarrow x_n - x_0 \to 0 \Rightarrow f_a(x_n - x_0) \to a^0 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{x_n - x_0} \to 1 \Rightarrow a^{x_n}/a^{x_0} \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{x_n} \to a^{x_0}$.

(3) Για $a=1 \Rightarrow f_1(x) = 1^x = 1$ σταθ. $\Rightarrow$ συνεχής, και για $a<1 \Rightarrow 1/a > 1$ και $f_{1/a}$ συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$ συνεχής $\Rightarrow a^x$ συνεχής. ∎