ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 1}}$ Ένα σύνολο G με μια πράξη

$$*: G\times G \to G : (x,y) \mapsto x*y$$

λέγεται <u>ομάδα</u>, αν η πράξη $*$

(i) είναι προσεταιριστική, δηλ.

$$(x*y)*z = x*(y*z), \quad \forall\, x,y,z\in G,$$

(ii) έχει ουδέτερο στοιχείο, δηλ. $\exists\, e\in G$:

$$e*x = x*e = x, \quad \forall\, x\in G, \text{ και}$$

(iii) κάθε $x\in G$ έχει συμμετρικό, δηλ. $\exists\, x'\in G$:

$$x*x' = x'*x = e.$$

Μια ομάδα $(G,*)$ λέγεται <u>αβελιανή</u> ή <u>μεταθετική</u> αν η πράξη $*$ είναι μεταθετική, δηλ. αν

(iv) $x*y = y*x, \quad \forall\, x,y\in G.$

<u>Παραδείγματα.</u>

(1) Τα $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ είναι αβελιανές ομάδες.

(2) Τα $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}^+\setminus\{0\},\cdot)$ είναι αβελιανές ομάδες.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ. 1}}$ Το ουδέτερο στοιχείο e μιας ομάδας $(G,*)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

<u>Αποδ.</u> Αν e, e' ουδέτερα, τότε:
$$\left.\begin{aligned} e*\overset{\text{ουδέτερο}}{e'} &= e \\ \overset{\text{ουδέτερο}}{e}*e' &= e' \end{aligned}\right\} \Rightarrow e=e'. \quad \blacksquare$$

ΠΡΟΤ. 2 Σε μια ομάδα $(G,*)$ το συμμετρικό ενός $x\in G$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

Απόδ. Έστω ένα $x\in G$ που έχει συμμετρικά τα x', x''. Αν e είναι το ουδέτερο, τότε:

$$x' = x'*e = x'*(x*x'') = (x'*x)*x'' = $$
$$= e*x'' = x''. \blacksquare$$

ΠΡΟΤ. 3 (Νόμος της διαγραφής). Σε μια ομάδα $(G,*)$, ισχύει η συνεπαγωγή

$$x*z = y*z \Rightarrow x = y.$$

Απόδ. $x*z = y*z \Rightarrow (x*z)*z' = (y*z)*z' \Rightarrow$

$$\Rightarrow x*(z*z') = y*(z*z') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x*e = y*e \Rightarrow x = y. \blacksquare$$

ΠΡΟΤ. 4 Σε μια ομάδα $(G,*)$ η εξίσωση

$$a*x = \beta \quad , \quad a,\beta\in G$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Απόδ. Το στοιχείο $a'*\beta$ είναι λύση:

$$a*(a'*\beta) = (a*a')*\beta = e*\beta = \beta.$$

Επίσης, είναι η μοναδική λύση: αν $\xi\in G$ είναι λύση τότε

$$a*\xi = \beta \Rightarrow a'*(a*\xi) = a'*\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a'*a)*\xi = a'*\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e*\xi = a'*\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \xi = a'*\beta. \blacksquare$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ. 5}}$ Σε μια ομάδα $(G,*)$
$\forall\, a \in G: \ (a')' = a$.

Απόδ

Η εξίσωση $x * a' = e$ έχει ακριβώς μία λύση (Πρότ. 4). Όμως:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Το } x = a \text{ είναι λύση: } a * a' = e \\ \text{Το } x = (a')' \text{ είναι λύση: } (a')' * a' = e\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ από το μονοσήμαντο των λύσεων $a = (a')'$. ■

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ. 6}}$ Σε μια ομάδα $(G,*)$, $\forall\, a, \beta \in G$:
$(a*\beta)' = \beta' * a'$.

Απόδ. Όπως προηγουμένως, θεωρούμε την εξίσωση

$$x * (a*\beta) = e.$$

Τότε:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Το } x = (a*\beta)' \text{ είναι λύση:} \\ \quad (a*\beta)' * (a*\beta) = e. \\ \text{Το } x = \beta' * a' \text{ είναι λύση:} \\ \quad (\beta' * a') * (a*\beta) = (\beta' * (a' * a)) * \beta = \\ \quad\quad = (\beta' * e) * \beta = \\ \quad\quad = \beta' * \beta = e\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ από το μονοσήμαντο των λύσεων
$(a*\beta)' = \beta' * a'$. ■

ΟΡΣ. 2 Ένα <u>σώμα</u> είναι ένα σύνολο F με δύο πράξεις: $+$ (πρόσθεση) και $\cdot$ (πολλ/σμό), έτσι ώστε

(1) $(F,+)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Το ουδέτερο στοιχείο της $+$ το ονομάζουμε <u>μηδέν</u> και το συμβολίζουμε με 0. Το συμμετρικό ενός $x \in F$ (ως προς την πρόσθεση) ονομάζεται <u>αντίθετο</u> και συμβολίζεται με $-x$.

(2) Ο πολλ/σμός $\cdot$ έχει τις ιδιότητες:

(i) Είναι μεταθετικός, δηλ.

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in F.$$

(ii) Είναι προσεταιριστικός, δηλ.

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in F$$

(iii) Έχει ουδέτερο στοιχείο, που είναι διάφορο του 0, συμβολίζεται με 1 και ονομάζεται <u>μονάδα</u>, δηλ.

$$\exists\, 0 \neq 1 \in F : \ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in F$$

(iv) κάθε $0 \neq x \in F$ έχει συμμετρικό που συμβολίζεται με x^{-1} και ονομάζεται <u>αντίστροφο</u>, δηλ:

$$\forall\, 0 \neq x \in F \ \exists\, x^{-1} \in F : \ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

(3) Οι δύο πράξεις συνδέονται με την επιμεριστική ιδιότητα:

$$x \cdot (y+z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in F.$$

ΠΡΟΤ. 7 (i) Σε ένα σώμα $(F,+,\cdot)$, η μονάδα και, $\forall\, 0 \neq x \in F$, το αντίστροφο x^{-1} είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

(ii) Ισχύει ο νόμος της διαγραφής

$$xy = zy \text{ και } y \neq 0 \Rightarrow x = z.$$

(iii) Η εξίσωση $ax = \beta$, με $a \neq 0$, έχει ακριβώς μία λύση, την $x = a^{-1}\beta$.

<u>Απόδ.</u> Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα. ■

ΠΡΟΤ. 8 Σε ένα σώμα $(F,+,\cdot)$:
$$0\cdot a = a\cdot 0 = 0, \quad \forall a\in F.$$

Απόδ. Εστω $a\in F$. Τότε:
$$a\cdot 0 = a\cdot 0+0 = a\cdot 0+(a+(-a)) = (a\cdot 0+a)+(-a) =$$
$$=(a\cdot 0+a\cdot 1)+(-a) = a(0+1)+(-a) =$$
$$= a\cdot 1+(-a) = a+(-a) = 0. \quad \blacksquare$$

Πόρισμα (1) Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

(2) Η εξίσωση $0\cdot x=\beta$ δεν έχει ποτέ ακριβώς μία λύση: αν $\beta\neq 0$, δεν υπάρχει καμμία λύση· αν $\beta=0$, υπάρχουν τόσες λύσεις όσα είναι τα στοιχεία του F.

(3) $a\beta=0 \Rightarrow a=0 \vee \beta=0$, και
$a\neq 0 \wedge \beta\neq 0 \Rightarrow a\beta\neq 0$.

ΠΡΟΤ. 9 Σε ένα σώμα $(F,+,\cdot)$:
(i) $(-a)\cdot\beta = -(a\beta)$, $\forall a,\beta\in F$.
(ii) $(-a)(-\beta) = a\beta$, $\forall a,\beta\in F$.

Απόδ. (i) Παρατηρούμε ότι:
$(a\beta)+((-a)\cdot\beta) = (a+(-a))\cdot\beta = 0\cdot\beta = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-a)\cdot\beta$ είναι το αντίθετο του $a\beta$, δηλ. ισχύει η (i).

(ii) $(-a)(-\beta) = -(a\cdot(-\beta)) = -((-\beta)\cdot a) =$
$= -(-\beta\cdot a) \underset{\text{(Προτ. 5)}}{=} \beta a = a\beta. \quad \blacksquare$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε ένα σώμα $(F,+,\cdot)$ έχει οριστεί και μια διάταξη ($\leq$), έτσι ώστε η αντίστοιχη γνήσια διάταξη ($<$) να έχει τις ιδιότητες:

(i) Τριχοτομία: $\forall\, \alpha,\beta \in F$: ισχύει ακριβώς ένα από:
$\alpha<\beta$ ή $\alpha=\beta$ ή $\alpha>\beta$.

(ii) $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma \quad \forall\, \gamma\in F$.

(iii) $\alpha>\beta$ και $\gamma>0 \Rightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Ένα $\alpha\in F$ λέγεται θετικό $\Leftrightarrow \alpha>0$, και λέγεται αρνητικό $\Leftrightarrow \alpha<0$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ. 10}}$ $\alpha>0 \Rightarrow -\alpha<0$.
Ομοίως $\alpha<0 \Rightarrow -\alpha>0$.

Αποδ $\alpha>0 \Rightarrow \alpha+(-\alpha)>0+(-\alpha) \Rightarrow 0>-\alpha$.
Ανάλογα η 2η. ■

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ. 11}}$ $\alpha<0$ και $\beta<0 \Rightarrow \alpha\beta>0$.

Αποδ
$$\left.\begin{array}{l} \alpha<0 \Rightarrow -\alpha>0 \\ \beta<0 \Rightarrow -\beta>0 \end{array}\right\} \xrightarrow[(\gamma=-\beta)]{(iii)} (-\alpha)(-\beta)>(-\beta)\cdot 0=0$$
■

Πόρισμα $\alpha\neq 0 \Rightarrow \alpha^2>0$.

Αποδ $\alpha>0 \xrightarrow[(\gamma=\alpha)]{(iii)} \alpha\cdot\alpha>0\cdot\alpha=0$. ■

Πόρισμα $1>0$ και $1+1>0$.

Αποδ Απο ορσ. σώματος $1\neq 0 \Rightarrow 1=1\cdot 1>0$. Οπότε:
$1>0 \Rightarrow 1+1>1+0=1>0$. ■