ΜΑΘΗΜΑ 1
ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΞΙΩΜΑ (Peano) Υπάρχει ένα σύνολο $\mathbb{N}$ και μια απεικόνιση $\varepsilon: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

(Φ1) Η ε είναι 1-1 $(\varepsilon(m)=\varepsilon(n) \Rightarrow m=n)$.

(Φ2) Η ε δεν είναι επί $(\exists\, \xi \in \mathbb{N} : \xi \notin \varepsilon(\mathbb{N}))$.

(Φ3) Αν ένα $S \subseteq \mathbb{N}$ έχει τις ιδιότητες:

(i) $\xi \in S$ και (ii) $n \in S \Rightarrow \varepsilon(n) \in S$,

τότε $S = \mathbb{N}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(1) Το $\xi \in \mathbb{N}$ με $\xi \notin \varepsilon(\mathbb{N})$ είναι μοναδικό. Πράγματι:

$$S = \varepsilon(\mathbb{N}) \cup \{\xi\} \Rightarrow \begin{cases} S \subseteq \mathbb{N} \\ \xi \in S \quad (i) \\ n \in S \Rightarrow \varepsilon(n) \in \varepsilon(\mathbb{N}) \subseteq S \quad (ii) \end{cases}$$

Από το (Φ3) $\Rightarrow$ $S = \mathbb{N} = \varepsilon(\mathbb{N}) \cup \{\xi\}$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \neq \xi$: $\exists!\, m \in \mathbb{N}$ με $\varepsilon(m) = n$.

ΟΡΟΛΟΓΙΑ: $\mathbb{N}$ = το σύνολο των φυσικών

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon(n)$ = επόμενος φυσικός

$\xi = 1$ (ένα)

$\varepsilon(\xi) = \varepsilon(1) = 2$ (δύο)

$\varepsilon(2) = 3$ (τρία), κλπ.

(Φ3) = αρχή της επαγωγής (ΑΕ) και είναι μια εύχρηστη μέθοδος για να δείχνουμε ιδιότητες των φυσικών και για να δίνουμε αναδρομικούς ορισμούς.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Αναδρομής)

X σύνολο, $f: X \to X$ συνάρτηση, $c \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists!\ \varphi: \mathbb{N} \to X$:

(1) $\varphi(1) = c$

(2) $\varphi(\varepsilon(n)) = f(\varphi(n))$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, δηλ. το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδ. Ζητάμε μια συνάρτηση $\varphi: \mathbb{N} \to X$ με τις ιδιότητες (1), (2).

Μια συνάρτηση είναι μια διμελής σχέση $\Phi \subseteq \mathbb{N} \times X$ που έχει την ιδιότητα

(α) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists!\, x \in X : (n, x) \in \Phi$,

και θέλουμε επιπλέον να έχει τις ιδιότητες:

(β) $(1, c) \in \Phi$ (ισοδ. του (1))

(γ) $(n, x) \in \Phi \Rightarrow (\varepsilon(n), f(x)) \in \Phi$ (ισοδ. του (2)).

Ασχολούμαι με τις ιδιότητες (β) και (γ): Υπάρχουν διμελείς σχέσεις $R \subseteq \mathbb{N} \times X$ που ικανοποιούν (β) και (γ); Ναι, (τουλάχιστον) το $R = \mathbb{N} \times X$. Θέτω

$$\mathcal{R} = \{ R \subseteq \mathbb{N} \times X \mid R \text{ ικανοποιεί } (\beta), (\gamma) \}.$$

Τότε $R = \mathbb{N} \times X \in \mathcal{R} \neq \emptyset$. Τώρα τέμνω όλα τα στοιχεία της οικογένειας $\mathcal{R}$:

$$\Phi := \bigcap_{R \in \mathcal{R}} R \subseteq \mathbb{N} \times X.$$

Η τομή Φ ικανοποιεί τις (β) και (γ):

$(1, c) \in R,\ \forall R \in \mathcal{R} \Rightarrow (1, c) \in \bigcap R = \Phi$.

Άρα ικανοποιείται η (β).

Έστω $(n, x) \in \Phi \Rightarrow (n, x) \in R,\ \forall R \in \mathcal{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\varepsilon(n), f(x)) \in R,\ \forall R \in \mathcal{R} \Rightarrow (\varepsilon(n), f(x)) \in \Phi$.

Άρα ικανοποιείται και η (γ).

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η Φ είναι συνάρτηση, δηλ. (ισοδύναμα) ικανοποιείται η (α).

Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχει εικόνα, δηλ. συμμετέχει σε ζεύγος $(n, x) \in \Phi$.

Θέτουμε
$$S := \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists\, x \in X : (n, x) \in \Phi \}.$$

Θδο $S = \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το (Φ3):

(i) Φ έχει ιδιότητα (β) $\Rightarrow (1, c) \in \Phi \Rightarrow 1 \in S$

(ii) Έστω $n \in S \Rightarrow \exists\, x \in X : (n, x) \in \Phi \overset{(\gamma)}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow (\varepsilon(n), f(x)) \in \Phi \Rightarrow \varepsilon(n) \in S$

S έχει ιδιότητες (i), (ii) $\underset{(\Phi 3)}{\Longrightarrow} S = \mathbb{N}$.

Δείχνουμε τώρα ότι η εικόνα καθενός $n \in \mathbb{N}$ είναι μοναδική.

Θέτουμε
$$M := \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists!\, x \in X : (n, x) \in \Phi \}.$$

Πάλι θδο $M = \mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας το (Φ3):

(i) $(1, c) \in \Phi$ ($\Rightarrow 1 \in S$). Υπάρχει και $\theta \neq c$, με $(1, \theta) \in \Phi$;; Έστω ότι υπάρχει ένα $\theta \neq c$ με $(1, \theta) \in \Phi$, θα καταλήξουμε σε άτοπο:

Θέτω $\Phi_1 = \Phi \setminus \{(1,\theta)\}$. Τότε:

$$\theta \neq c \Rightarrow (1,\theta) \neq (1,c) \Rightarrow (1,c) \in \Phi_1,$$

δηλ. η Φ_1 ικανοποιεί την (β).

$$(n,x) \in \Phi \setminus \{(1,\theta)\} = \Phi_1 \subseteq \Phi \overset{(\gamma)}{\Rightarrow} (\varepsilon(n), f(x)) \in \Phi$$

$\Rightarrow (\varepsilon(n), f(x)) \in \Phi$ και $\varepsilon(n) \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon(n), f(x)) \in \Phi$ και $(\varepsilon(n), f(x)) \neq (1,\theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon(n), f(x)) \in \Phi_1$.

δηλ η Φ_1 ικανοποιεί και την (γ).

Άρα $\Phi_1 \in \mathcal{R} \Rightarrow \Phi \subseteq \Phi_1 = \Phi \setminus \{(1,\theta)\}$, άτοπο.

Φθάσαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι το 1 έχει δύο εικόνες, την c και την $\theta \neq c$. Άρα το 1 έχει μόνο μία εικόνα, την c, και $1 \in M$.

(ii) Έστω $n \in M$ (άρα $\exists!\, x \in X : (n,x) \in \Phi$).
Θδο $\varepsilon(n) \in M$.

Αφού $(n,x) \in \Phi \Rightarrow (\varepsilon(n), f(x)) \in \Phi$. Θδο το $f(x)$ είναι το μοναδικό στοιχείο του X με αυτή την ιδιότητα. Υποθέτουμε ότι $\exists\, y \in X : y \neq f(x)$ και $(\varepsilon(n), y) \in \Phi$, και θα καταλήξουμε σε άτοπο: θεωρούμε το

$$\Phi_2 = \Phi \setminus \{(\varepsilon(n), y)\}.$$

Όπως προηγουμένως:

$$1 \neq \varepsilon(n) \Rightarrow (1,c) \neq (\varepsilon(n), y) \Rightarrow (1,c) \in \Phi_2.$$

Έστω και $(m,z) \in \Phi_2$. Τότε και $(\varepsilon(m), f(z)) \in \Phi_2$.
Πράγματι: αφού $(m,z) \in \Phi$, ισχύει και $(\varepsilon(m), f(z)) \in \Phi$. Για να είναι στοιχείο του Φ_2, αρκεί να μην συμπίπτει με το $(\varepsilon(n), y)$. Υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

Αν $m \neq n \Rightarrow \varepsilon(m) \neq \varepsilon(n) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon(m), f(z)) \neq (\varepsilon(n), f(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon(m), f(z)) \in \Phi \setminus \{(\varepsilon(n), f(x))\}$

$\Rightarrow (\varepsilon(m), f(z)) \in \Phi_2$.

Αν $m = n \in M \Rightarrow (m,z) = (n,z) \in \Phi_2 \subseteq \Phi$ και το $n \in M$ συμπληρώνεται με μοναδικό τρόπο σε ζεύγος $(n,x) \in \Phi \Rightarrow$
$\Rightarrow z = x$ και $f(z) = f(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\varepsilon(m), f(z)) = (\varepsilon(n), f(x)) \neq (\varepsilon(n), y) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\varepsilon(m), f(z)) \in \Phi_2$.

Απέδειξα δηλ. ότι το $\Phi_2 \subsetneqq \Phi$ έχει τις ιδιότητες:
$(1,c) \in \Phi_2$ και
$(m,z) \in \Phi_2 \Rightarrow (\varepsilon(m), f(z)) \in \Phi_2$.

Άρα, $\Phi_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow \Phi \subseteq \Phi_2$, άτοπο.

Καταλήξαμε σε αυτό το άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι για κάποιο $n \in M$, το $\varepsilon(n)$ συμμετέχει στην Φ με δύο στοιχεία, το $f(x)$ και το y. Άρα το $\varepsilon(n)$ συμμετέχει μόνο με το $f(x)$, επομένως $\varepsilon(n) \in M$.

Έτσι, για το M αποδείξαμε ότι
$1 \in M$, και
$n \in M \Rightarrow \varepsilon(n) \in M$.
Οπότε το (Φ3) εξασφαλίζει ότι $M = \mathbb{N}$, δηλ. η διμελής σχέση Φ είναι η ζητούμενη συνάρτηση φ. ∎

$\boxed{\text{ΕΡΩΤΗΣΗ.}}$ Πόσα ζεύγη $(\mathbb{N}, \varepsilon)$ που ικανοποιούν τα αξιώματα του Peano υπάρχουν;

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το ΘΑ για να ορίσουμε τις πράξεις του $\mathbb{N}$. Έστω $m \in \mathbb{N}$.

Πρόσθεση με m $\quad (: \varphi_m(n) = m+n)$.
$\varphi_m(1) = \varepsilon(m) \quad (: m+1 = \varepsilon(m))$
$\varphi_m(\varepsilon(n)) = \varepsilon(\varphi_m(n)) \quad (: (n+1)+m = (m+n)+1)$.
[ΘΑ για $X = \mathbb{N}$, $c = 1$, $f = \varepsilon$].

<u>Πολλ/σμός με m:</u> $(: \psi_m(n) = n \cdot m)$.

$$\psi_m(1) = m \quad (: 1 \cdot m = m)$$

$$\psi_m(\varepsilon(n)) = \psi_m(n) + m = \varphi_m \circ \psi_m(n) \quad (: (n+1) \cdot m = nm + m)$$

[ΘΑ για $X = \mathbb{N}$, $c = 1$, $f = \varphi_m$].

<u>Δυνάμεις με βάση m:</u> $(: \chi_m(n) = m^n)$.

$$\chi_m(1) = m \quad (: m^1 = m)$$

$$\chi_m(\varepsilon(n)) = \chi_m(n) \cdot m = \psi_m \circ \chi_m(n)$$

$$(: m^{n+1} = m^n \cdot m).$$

[ΘΑ για $X = \mathbb{N}$, $c = 1$, $f = \psi_m$].

Μέσω των προηγούμενων απεικονίσεων ορίζονται στο $\mathbb{N}$ οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \longmapsto m + n := \varphi_n(m).$$

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \longmapsto m \cdot n := \psi_n(m).$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ (i) Οι πράξεις $+, \cdot$ είναι <u>μεταθετικές</u>:

$$m + n = n + m, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$$

$$m \cdot n = n \cdot m, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$$

(ii) Οι πράξεις $+, \cdot$ είναι <u>προσεταιριστικές</u>:

$$(k + m) + n = k + (m + n), \quad \forall\, k, m, n \in \mathbb{N}$$

$$(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n), \quad \forall\, k, m, n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Ο πολλ/σμός είναι <u>επιμεριστικός</u> ως προς την πρόσθεση:

$$(k + m) \cdot n = k \cdot n + m \cdot n$$

<u>Αποδ:</u> παραλείπεται (βλ. Σημειώσεις στα ΘΜΑ, e-class).

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι ο πολλ/σμός έχει <u>ουδέτερο στοιχείο</u>: $\exists\, 1 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$1 \cdot m = m \cdot 1 = m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Η πρόσθεση στο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ δεν έχει ουδέτερο στοιχείο.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι συνεπαγωγές:
(1) $m+p = n+p \Rightarrow m = n$
(2) $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ορίζουμε μια <u>διάταξη</u> $\leq$ στο $\mathbb{N}$:
$m \leq n \Leftrightarrow (\exists\, p \in \mathbb{N} : m+p = n) \,\underline{\vee}\, (m=n)$.

Αποδεικνύονται οι επόμενες προτάσεις:

ΠΡΟΤΑΣΗ Η σχέση $\leq$ είναι ολική διάταξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ Ισχύουν τα επόμενα:
(1) $\forall\, n \in \mathbb{N} : 1 \leq n$.
(2) $m < n \Rightarrow m+1 \leq n$.
(3) $m \leq n \Rightarrow m+p \leq n+p, \ \forall p \in \mathbb{N}$.
(3α) $m+p \leq n+p$, για κάποιο $p \in \mathbb{N} \Rightarrow m \leq n$.
(4) $m \leq n \Rightarrow m \cdot p \leq n \cdot p, \ \forall\, p \in \mathbb{N}$.
(4α) $m \cdot p \leq n \cdot p$, για κάποιο $p \in \mathbb{N} \Rightarrow m \leq n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $(X, \leq)$ ένα διατεταγμένο σύνολο. Λέμε ότι ένα $A \subseteq X$ <u>έχει ελάχιστο στοιχείο</u>, αν $\exists\, a \in A$: $a \leq x, \ \forall x \in A$.

Αντίστοιχα, λέμε ότι το A <u>έχει μέγιστο στοιχείο</u>, αν $\exists\, b \in A : x \leq b, \ \forall x \in A$.

Το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο: αν $b \in \mathbb{N}$ με $b \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $b \geq b+1 = \varepsilon(b)$, άτοπο. Έχει ελάχιστο, το 1.
Για τα υποσύνολά του ισχύει

ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχή Ελαχίστου) Κάθε μη κενό $M \subseteq \mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Για την απόδειξη της ΑΕλαχίστου παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύει η εξής γενικότερη μορφή της ΑΕπαγωγής: Αν

Αν: $S \subseteq \mathbb{N}$

$1 \in S$

$1, 2, \ldots, n \in S \Rightarrow n+1 \in S$,

τότε $S = \mathbb{N}$.

Η προηγούμενη πρόταση λέγεται ισχυρή μορφή της επαγωγής. Η απόδειξή της είναι προφανής: Θέτουμε

$$T = \{n \in \mathbb{N} : 1 \in S, 2 \in S, \ldots, n \in S\}.$$

Τότε από $(\Phi 3) \Rightarrow T = \mathbb{N}$, οπότε και $S = \mathbb{N}$.

Απόδειξη της ΑΕ. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$. ΘΔο $\exists\, a \in A$: $a \leq x$, $\forall x \in A$. Υποθέτουμε ότι $\nexists$ τέτοιο a και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θέτουμε

$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\} = \mathbb{N} \setminus A.$$

Αν $1 \in A \Rightarrow 1$ ελάχιστο του A (αφού είναι ελάχιστο του $\mathbb{N}$), άτοπο. Άρα $1 \notin A$ και $1 \in T$.

Έστω τώρα $1, 2, \ldots, n \in T$. Πού ανήκει το $n+1$;

Αν $n+1 \in A$ και $x \in A$, επειδή η διάταξη είναι ολική,

είτε $x < n+1 \Rightarrow x \in T$, άτοπο,

είτε $x = n+1 \Rightarrow n+1 \leq x$

είτε $x > n+1 \Rightarrow n+1 \leq x$

άρα $n+1 \leq x$, $\forall x \in A$. Τότε όμως, αν $n+1 \in A$, είναι ελάχιστο στοιχείο του A, άτοπο. Άρα πρέπει $n+1 \notin A$, οπότε $n+1 \in T$. Οπότε δείξαμε ότι

$$1, 2, \ldots, n \in T \Rightarrow n+1 \in T.$$

Από την ισχυρή μορφή της επαγωγής $\Rightarrow T = \mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus A \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \emptyset$, άτοπο. Άρα $\exists$ ελάχιστο $a \in A$. ∎

Εφαρμογή του (Φ3)

Αν το σύνολο S έχει n στοιχεία $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(S)$ = δυναμοσύνολο του S έχει 2^n στοιχεία.

Απόδ. Θέτουμε $T = \{n \in \mathbb{N} :$ η ανωτέρω πρόταση αληθεύει$\}$.
Αν $|S| = 1 \Rightarrow \mathcal{P}(S) = \{\emptyset, S\}$, και $|\mathcal{P}(S)| = 2^1 \Rightarrow 1 \in T$.
Έστω ότι $n \in T$, δηλ. υποθέτουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $|S| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^n$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και η συνεπαγωγή $|S| = n+1 \Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = 2^{n+1}$.
Πράγματι, έστω ένα σύνολο με $n+1$ στοιχεία:

$$P = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}.$$

Παρατηρούμε ότι το

$$Q = \{x_1, \dots, x_n\} = P \setminus \{x_{n+1}\}$$

έχει ακριβώς n στοιχεία, άρα 2^n υποσύνολα.
Επίσης παρατηρούμε ότι το $\mathcal{P}(P)$ χωρίζεται σε δύο ξένα υποσύνολα:

$$\mathcal{P}(P) \supseteq A := \{X \subseteq P : x_{n+1} \in X\}.$$

$$\mathcal{P}(P) \supseteq B := \{Y \subseteq P : x_{n+1} \notin Y\}.$$

Τότε η απεικόνιση

$$f : A \to B : X \mapsto f(X) = X \setminus \{x_{n+1}\}.$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Δηλ. $|A| = |B|$
Όμως $B = \mathcal{P}(Q)$ και $|B| = 2^n$. Άρα

$$|\mathcal{P}(P)| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Άρα $n+1 \in T$.
Δείξαμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in T \\ n \in T \Rightarrow n+1 \in T. \end{array}\right\} \xrightarrow{(\Phi 3)} T = \mathbb{N}.$$

Επομένως η πρόταση που διατυπώσαμε ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $2 = \varepsilon(1)$, $3 = \varepsilon(2)$, κτλ., νδο $\varphi_1(1) = 2$, $\varphi_1(2) = 3$, $\varphi_1(3) = 4$, $\ldots$, $\varphi_1(n) = \varepsilon(n)$.

(2) Νδο $\varphi_1 = \varepsilon$, $\varphi_2 = \varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon^2$, $\ldots$, $\varphi_m = \varepsilon^m = \underbrace{\varepsilon \circ \cdots \circ \varepsilon}_{m\text{-φορές}}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Να βρείτε ανάλογη ιδιότητα των ψ_m και χ_m.

(3) Νδο φ_m, ψ_m, χ_m είναι 1-1. Ποιές από αυτές είναι επί;

(4) Νδο $\varphi_m(n) = \varphi_n(m)$ $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ και

$$\psi_m(n) = \psi_n(m), \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$