Απειροστικός Λογισμός 1
Πέμπτη 21 Ιανουαρίου 2022
Κλιμάκιο 1, Ώρα 09:00–11:00

Θέμα 1. (**2.5 μον.**)

(α) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και φραγμένα. Υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$. Δείξτε ότι

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B).$$

(β) Βρείτε τα supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο (αν υπάρχουν) των συνόλων:

$$A = \left\{ 2 + \frac{1}{3^n \cdot 4^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x \leqslant 5\}.$$

Θέμα 2. (**3 μον.**)

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\alpha_n = \frac{4^n\, n!}{n^n}, \;\; \beta_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2}, \;\; \gamma_n = \left(\sqrt[n]{2n} - \frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\delta_n = \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{(n+1)^{3/2}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{3/2}}.$$

Θέμα 3. (**2 μον.**)

Διατυπώστε και αποδείξτε την αρχή μεταφοράς για τη συνέχεια.

Θέμα 4. (**2.5 μον.**)

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα τη συνάρτηση $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x) = x^2(1-x)$ αν $x \in \mathbb{Q}$, και $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Θέμα 5. (**2.5 μον.**)

(α) Έστω $f \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε: (i) $f(0) = 0$, και (ii) για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει $y \geq 0$ τέτοιο ώστε $f(y) > 3f(x)$. Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ υπάρχει $z > 0$ ώστε $f(z) = a$.

(β) Έστω $-1 < a < 0$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $(1+a)^n \leq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!