Απειροστικός Λογισμός Ι - Τελική Εξέταση

16 - 6 - 2022

Θέμα 1ο.

Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(1) Αν το $A \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο και $t = \inf A$, τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) σημείων του A με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$.

(2) Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,2] \to [0,1)$ η οποία είναι επί του $[0,1)$.

(3) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα και παραγωγίσιμη, τότε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2ο.

(α) Αν τα A, B είναι μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι άνω φραγμένο και ισχύει $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \quad , \quad b_n = \frac{1}{2n} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + (2n)^n}$$

Θέμα 3ο.

(α) Αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι φραγμένη.

(β) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Θέτουμε

$$A = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Αποδείξτε ότι το σύνολο A έχει μέγιστο στοιχείο.

(ii) Εξετάστε αν το σύνολο A έχει ελάχιστο στοιχείο.

Θέμα 4ο.

(α) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με την ακόλουθη ιδιότητα:
Υπάρχουν ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ με

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \ , \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \ \text{ και } \ \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 3.$$

Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 1$ σε άπειρο πλήθος σημείων.

(β) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο f'. Αν η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή, αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα (a, b) στο οποίο η f είναι γνησίως μονότονη.

Καλή επιτυχία!