Απειροστικός Λογισμός Ι - Ενδιάμεση Εξέταση

7 - 5 - 2022

Θέμα 1ο.

Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή. Αν αυτό ισχύει αποδείξτε το, διαφορετικά δώστε αντιπαράδειγμα.

(1) Αν το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $s = \sup A$, τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ με $s - \varepsilon < a < s$.

(2) Η ακολουθία (a_n) τείνει στο $+\infty$ αν και μόνο αν, για κάθε $M > 0$, υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.

(3) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2ο.

(α) Δίνονται δύο μη κενά υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: Για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$.

(i) Δείξτε ότι το A είναι άνω φραγμένο, το B είναι κάτω φραγμένο και ισχύει $\sup A \leq \inf B$.

(ii) Αν επιπλέον ισχύει ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $b - a < \varepsilon$, δείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

(β) Βρείτε το supremum, το infimum και (αν υπάρχουν) το μέγιστο και το ελάχιστο του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Θέμα 3ο.

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\,2^n} \quad , \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad c_n = \sqrt[n]{4^n + 8^n} \,,$$

$$d_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$$

Θέμα 4ο.

(α) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ με $f(x_0) = 0$.

(β) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g : [0, 2] \to [0, 1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $s < 1$ τέτοιο ώστε $g(x) < s$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Καλή επιτυχία!