ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ, ΑΘΗΝΑ 15784

ΤΗΛ 210 - 7276397, FAX 210 - 7276398

Τετάρτη, 30 Σεπτεμβρίου 2015

Περίγραμμα

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Κωδικός Μαθήματος: 101

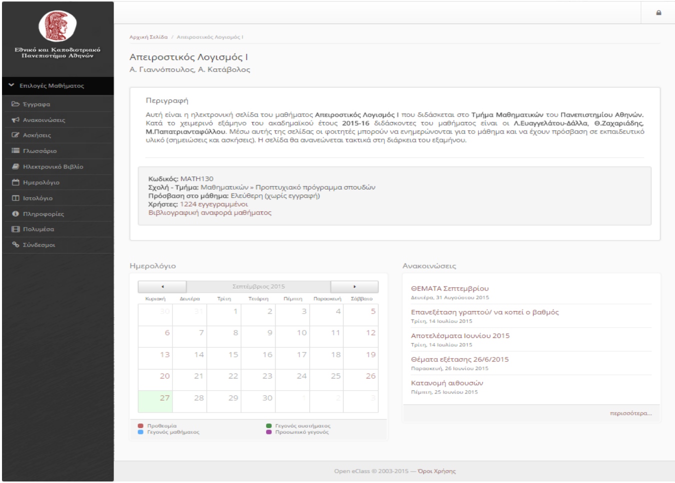
Έτος διδασκαλίας: 2015-2016, Χειμερινό Εξάμηνο
Ημέρες: Δευτ. - Τετ. - Παρ., Ώρα: 13:00-15:00

Διδάσκοντες

- **Τμήμα 1°** (ΑΜ που λήγει σε 1,2,3) Αμφ 24,
  Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Γραφείο: 217, τηλ. 210-7276380,
  `http://noether.math.uoa.gr/Academia/didaktiki/tzaharia_gr`
- **Τμήμα 2°** (ΑΜ που λήγει σε 4,5,6,7) Αμφ 22,
  Ευαγγελάτου-Δάλλα Λεώνη
  Γραφείο: 207, τηλ. 210-7276375,
  `http://noether.math.uoa.gr/Academia/analysis/ldalla_gr`
- **Τμήμα 3°** (ΑΜ που λήγει σε 8,9,0) Αμφ 23,
  Παπατριανταφύλλου Μαρία
  Γραφείο: 203, τηλ. 210-7276349,
  `http://noether.math.uoa.gr/Academia/analysis/papatriantafylloy-maria`

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Ιστοσελίδα του Μαθήματος

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/



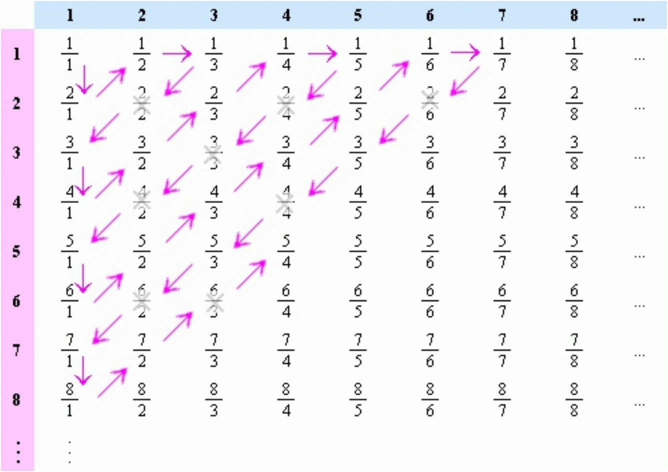
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Περιγραφή του Μαθήματος

1. Πραγματικοί αριθμοί
2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών
3. Συναρτήσεις
4. Όριο και Συνέχεια Συναρτήσεων
5. Παράγωγος

1. **Πραγματικοί αριθμοί**:

- Αξιωματική θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών
- Φυσικοί, Ακέραιοι και Ρητοί αριθμοί
- Αξίωμα πληρότητας
- Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας
- Άρρητοι αριθμοί
- Ακέραιο μέρος
- Πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς
- Κλασσικές ανισότητες

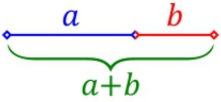
Η διαγώνια μέθοδος του Cantor και η « 1- 1 » αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς



Το σοκ του Πυθαγόρα - Υποτείνουσα ορθογώνιων τριγώνων

Χρυσή τομή: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$

- Γεωμετρικά προκύπτει μέσω της αναλογίας: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \phi$

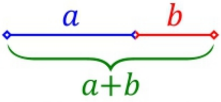


- Αλγεβρικά προκύπτει ως θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Χρυσή τομή: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$

- Γεωμετρικά προκύπτει μέσω της αναλογίας: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \phi$



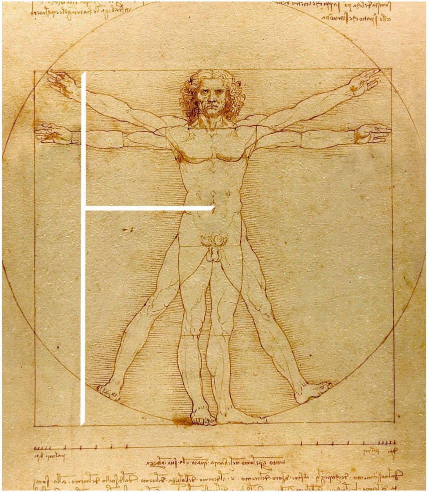
- Αλγεβρικά προκύπτει ως θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Τι εκφράζει πραγματικά αυτός ο αριθμός;

Αρμονία στην αρχιτεκτονική του Παρθενώνα, 438 π.Χ.

Αρμονία στο έργο του Da Vinci - Vitruvian Man, 1487 μ.Χ.



Υπερβατικοί αριθμοί: Ρητή προσέγγιση του π με 999 δεκαδικά ψηφία

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078
1640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058
2231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964
4288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486
1045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282
9254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433
0572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673
5188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522
4737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000
5681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301
4654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362
9774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024
4594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865
8753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378
7593751957781857780532171226806613001927876611195909216420199

2. **Ακολουθίες πραγματικών αριθμών:**

- Συγκλίνουσες ακολουθίες
- Μονότονες ακολουθίες
- Κιβωτισμός διαστημάτων
- Αναδρομικές ακολουθίες

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;
Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$.

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;
Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$.

- Μέσω τύπου:
  1. $\alpha_n = \sqrt[n]{n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  2. $\alpha_n = (1+1/n)^n$, $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e = 2,71828...$
- Μέσω αναδρομικής σχέσης:
  1. $\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n}$, $n \geq 1$, $\alpha_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \phi$.
  2. Ακολουθία Fibonacci: $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \phi$.
- Ακολουθία των πρώτων αριθμών:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

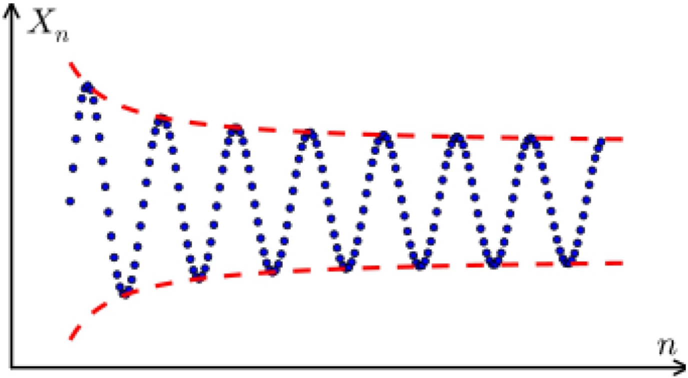
Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;
Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$.

- Μέσω τύπου:
  1. $\alpha_n = \sqrt[n]{n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  2. $\alpha_n = (1+1/n)^n$, $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e = 2,71828...$
- Μέσω αναδρομικής σχέσης:
  1. $\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n}$, $n \geq 1$, $\alpha_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \phi$.
  2. Ακολουθία Fibonacci: $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \phi$.
- Ακολουθία των πρώτων αριθμών:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Υπάρχει συνάρτηση ή αναδρομικός τύπος που να δίνει την παραπάνω ακολουθία;

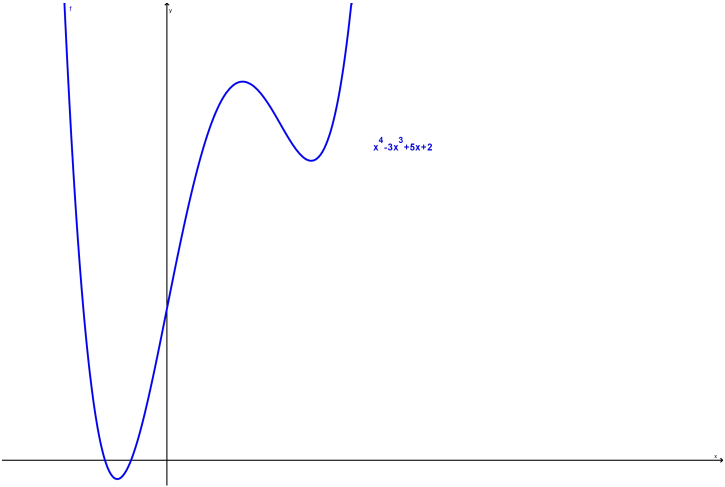
Φραγμένη μη συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών άπειρων όρων



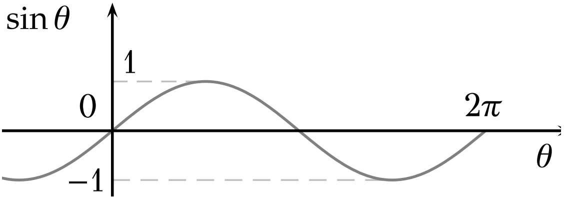
3. Συναρτήσεις:

- Βασικοί ορισμοί
- Αλγεβρικές συναρτήσεις
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Εκθετική συνάρτηση

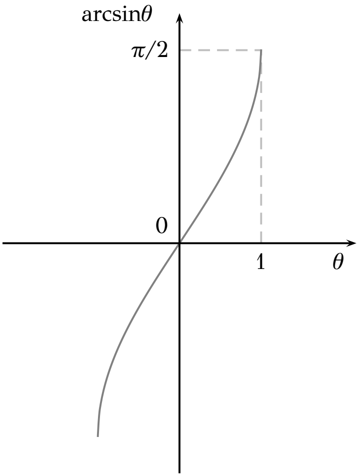
Γράφημα πολυωνυμικής συνάρτησης 4ου βαθμού



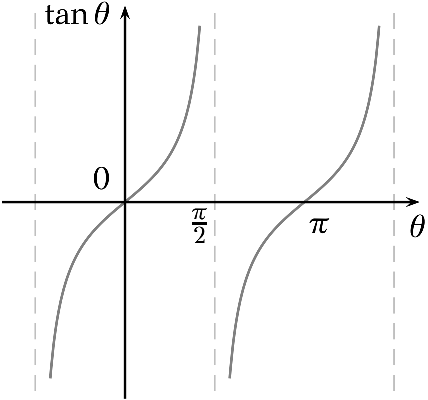
Γράφημα τριγωνομετρικής συνάρτησης ημιτόνου



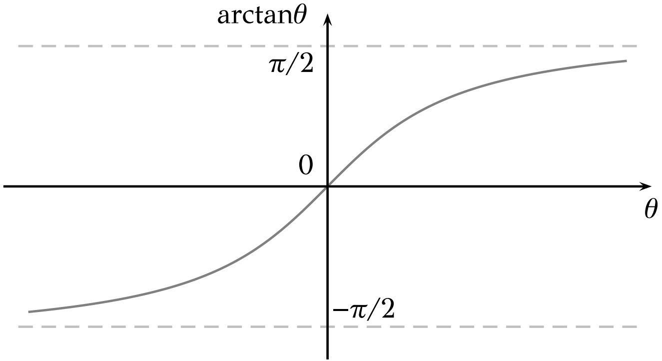
Γράφημα αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης ημιτόνου



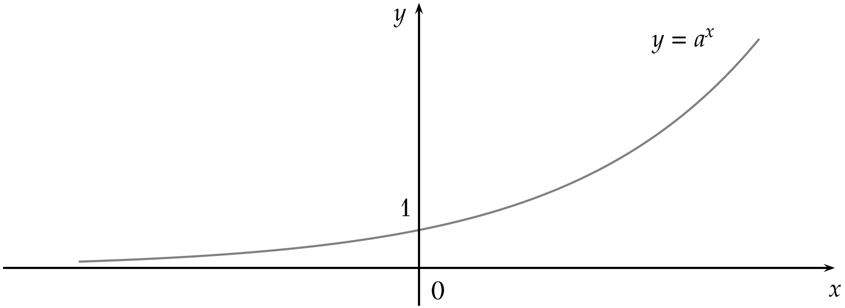
Γράφημα τριγωνομετρικής συνάρτησης εφαπτομένης



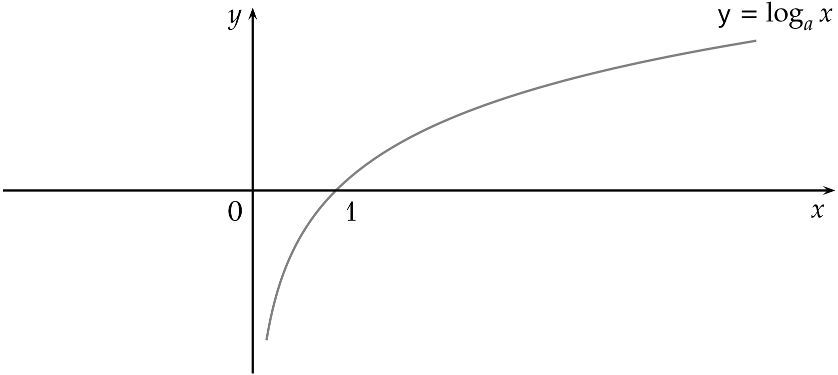
Γράφημα αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης εφαπτομένης



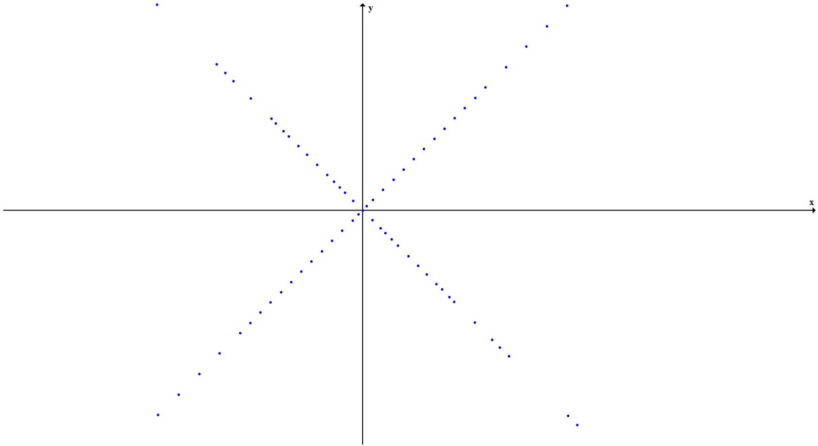
Γράφημα εκθετικής συνάρτησης για $\alpha > 1$



Γράφημα λογαριθμικής συνάρτησης για $\alpha > 1$



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{για } x \in \mathbf{Q} \\ -x, & \text{για } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$



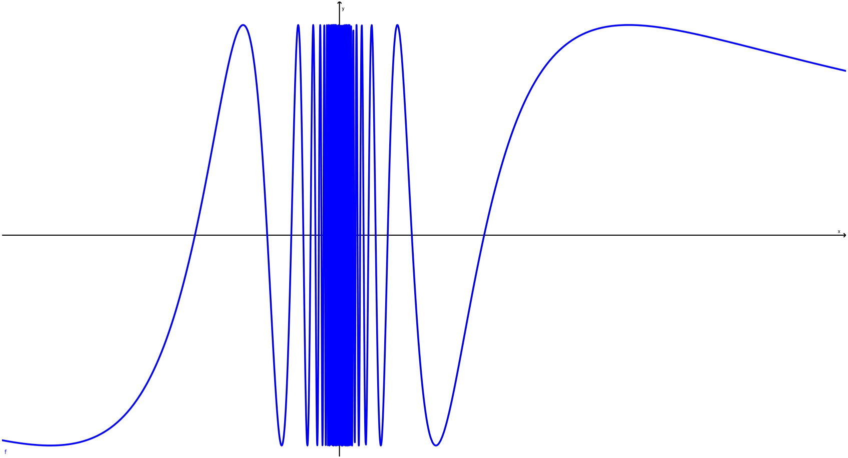
4. Όρια και Συνέχεια Συνάρτησης:

- Η έννοια του ορίου συνάρτησης - Συνέχεια
- Αρχή της μεταφοράς
- Συνέχεια γνωστών συναρτήσεων
- Συνέχεια και τοπική συμπεριφορά
- Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής
- Ύπαρξη μεγίστης και ελαχίστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστά διαστήματα - Μονότονες συναρτήσεις
- Συνεχείς και «1-1» συναρτήσεις
- Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Λογαριθμική συνάρτηση

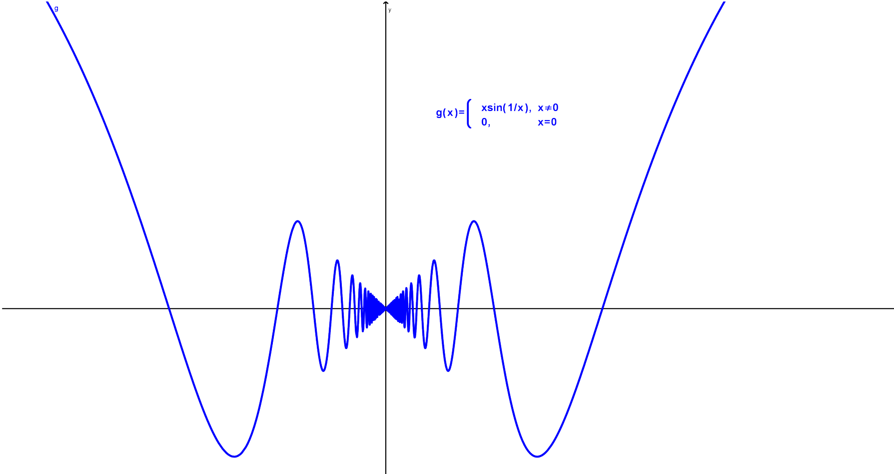
5. Παράγωγος:

- Εισαγωγή: Παραδείγματα από τη Γεωμετρία και τη Φυσική
- Η έννοια της παραγώγου
- Κανόνες παραγώγισης
- Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων
- Θεώρημα μέσης τιμής
- Θεώρημα Darboux
- Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης
- Κριτήρια τοπικών ακροτάτων
- Γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής
- Κανόνες De L'Hospital
- Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις - Σημεία καμπής
- Μελέτη συναρτήσεων

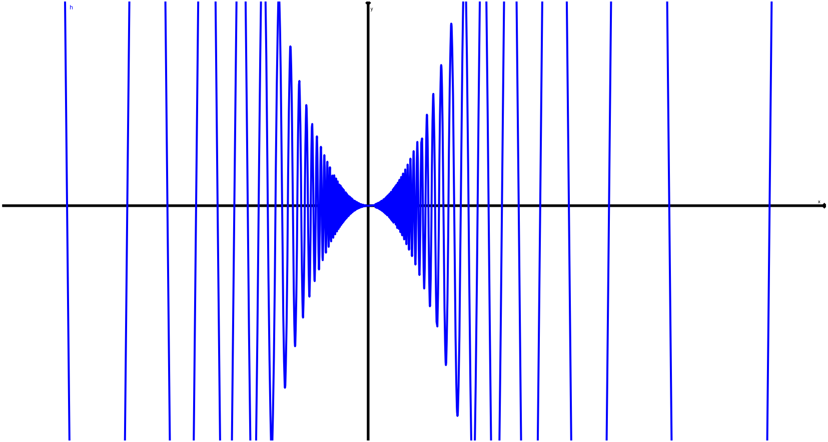
Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} sin(1/x), & x \neq 0 \\ \quad 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$



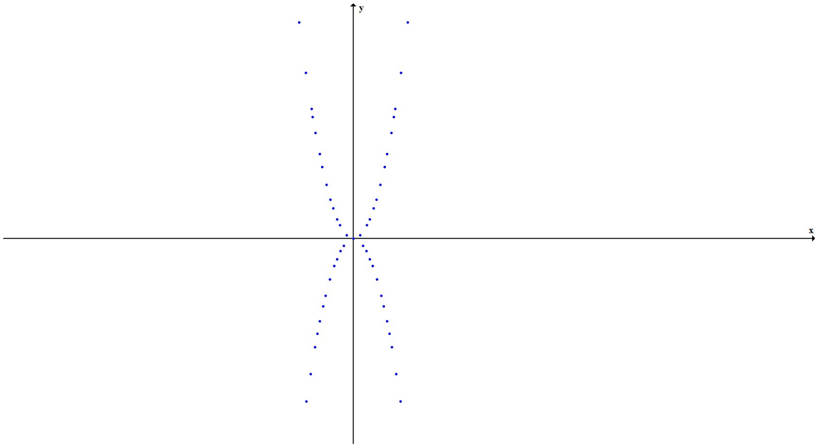
Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} xsin(1/x), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$



Η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^2 sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{για } x \in \mathbf{Q} \\ -x^2, & \text{για } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$



Βιβλιογραφία

- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας: « Απειροστικός Λογισμός Ι », Εκδόσεις Συμμετρία.
- Λ. Τσίτσας: « Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός », Εκδόσεις Συμμετρία.
- M. Spivak: “ Calculus ”, Benjamin (κυκλοφορεί σε Ελληνική μετάφραση με τίτλο: « Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός », Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.)
- R. Courant and F. John: “ Introduction to Calculus and Analysis ”, Vol. I, Interscience.
- G. H. Hardy: “ A Course in Pure Mathematics”, Cambridge University Press.
- S. Salas and E. Hille: “ Calculus ”, John Wiley.
- R. Bartle and D. Sherbert: “ Introduction to Real Analysis ”, John Wiley.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
University of Athens
Department of Mathematics