Απειροστικός Λογισμός Ι
14 Φεβρουαρίου 2020

1. **(1+1 μον.)** Έστω X, Y μη κενά και άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup(X), \sup(Y)\}$.

(β) Δείξτε ότι αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε $x \leq y$, τότε $\sup(X) \leq \sup(Y)$.

2. **(1+1 μον.)** Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών.

(α) Δείξτε ότι αν η (a_n) φραγμένη, τότε $a_n \to \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.

(β) Δείξτε ότι αν η (a_n) μη φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

3. **(2.5 μον.)** Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να υπολογισθεί το όριο, αν αυτό υπάρχει, των ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{4^n\, n!}{n^n}, \quad \beta_n = \left(\sqrt[n]{n} + \frac{1}{3}\right)^n, \quad \gamma_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n,$$

$$\delta_n = \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} \quad \text{και} \quad \varepsilon_n = \frac{1 + 7n}{3^n}.$$

4. **(1.5+1.5 μον.)**

(α) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, αν και μόνο αν, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(β) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f(x^n) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

5. **(1+1.5+1 μον.)**

(α) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{Q}$, και $f(x) = x^3$ αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(β) Ορίζουμε $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$. Εξετάστε τη συνέχεια της f, την παραγωγισιμήτητα της f, και τη συνέχεια της παραγώγου f' της f.

(γ) Έστω $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^3}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $M > 0$ έχουμε ότι $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x + Mx^2) - f(x)\right] = 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!