

Ασκήσεις: 21/3/2024.

① Βρείτε τα  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{n!}$ , χωρίς κριτήρια  
αδρόν/ρίσας.

② (i) Βρείτε το  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \right)$ .

(ii) Έχουμε ότι  $\frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$ ,  $\frac{n}{n^2+2} \rightarrow 0$ , ...,  $\frac{n}{n^2+n} \rightarrow 0$ ,

αλλά το άθροισμα δεν ηγείναι στο 0. Γιατί αυτό δεν  
έρχεται κόντρα στην αλγεβρα των ορίων, που λέει ότι

αν  $a_n \rightarrow a$  και  $b_n \rightarrow b$ , τότε  $a_n + b_n \rightarrow a + b$

(και αντίστοιχα αν  $a_n \rightarrow a$ ,  
 $b_n \rightarrow b$ ,  $c_n \rightarrow c$ , τότε  $a_n + b_n + c_n \rightarrow a + b + c$ ,  
κλπ) ??

③  $\forall n \in \mathbb{N}$ , έστω  $s(n)$  το άθροισμα των ηρωτων διαιρετων του  $n$ .

π.χ.  $s(6) = s(2 \cdot 3) = 2 + 3 = 5$ ,

$$s(8) = s(2^3) = 2 + 2 + 2 = 6.$$

Δείξτε ότι το  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(n)}{n}$  δεν υπάρχει.

④ Bpείτε τα :

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} .$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{8n^2 + 6n + 3} .$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{70^{\frac{n}{2}} - 1000 \cos(n)}{2^{3n} + 3^{2n} + n^2} .$$

- ⑤ (i) Έστω  $q \in \mathbb{Q}$ . Κατασκευάστε συγκεκριμένες ακολουθίες  
(δύο με δύο)  $p_n$  και  $q_n$ , και αριθμών,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
ώστε  $q_n \nearrow q$ ,  $a_n \nearrow q$ .
- (ii) Παρόμοια, αλλά με  $q_n \searrow q$ ,  $a_n \searrow q$ .
- (iii) Παρόμοια, αλλά ξεκινώντας από απόφαση  $a$ .

⑥ Έστω  $a_n \rightarrow 5$ . Δείξτε ότι  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ .

