ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Θέτουμε

$$0! = 1$$

και ορίζουμε (αναδρομικά)

$$1! = 1$$

και

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Συμβολίζουμε

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \forall\ k, n \in \mathbb{N}_0 \text{ με } 0 \leq k \leq n.$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ (διωνυμικό ανάπτυγμα) (i) $\forall\ k, n \in \mathbb{N}_0$ με $0 \leq k \leq n$, ισχύει

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad \text{(τριγωνική ιδιότητα του Pascal)}$$

(ii) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{(διωνυμικό ανάπτυγμα).}$$

Απόδ

(i) $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

(ii) Επαγωγικά:

Για $n=1$

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{n-k} b^k = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 =$$

$$= \frac{1!}{0!(1-0)!} a \cdot 1 + \frac{1!}{1!(1-1)!} 1 \cdot b = a+b \text{, ισχύει.}$$

Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Rightarrow$$

$$(a+b)^{n+1} = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right] \cdot (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \overset{j=k+1}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1} b^j \overset{j=k}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k =$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$\overset{(i)}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k .$$

Για το τρίγωνο του Pascal σχηματικά έχουμε:

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4}$$

κλπ

Αν οι παραστάσεις $\binom{n}{k}$ αντικατασταθούν με τα ίσα τους παίρνουμε

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

κλπ

Λήμμα

(i) $\beta \geq 0 \Rightarrow \beta^n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\alpha \geq \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha^n \geq \beta^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Αποδ

(i) Εστω $\beta \geq 0$. Τότε, για $n=1$: $\beta^1 = \beta \geq 0$. ✓

Επίσης: $\beta^n \geq 0 \underset{\beta \geq 0}{\Rightarrow} \beta^{n+1} \geq \beta \cdot 0 = 0$.

(ii) Εστω $\alpha \geq \beta \geq 0$. Για $n=1$: $\alpha^1 = \alpha \geq \beta = \beta^1$. ✓

Επίσης: $\left.\begin{array}{l} \alpha^n \geq \beta^n \underset{(\alpha \geq 0)}{\Rightarrow} \alpha^{n+1} \geq \alpha\beta^n \\ \alpha \geq \beta \underset{(i)}{\Rightarrow} \alpha\beta^n \geq \beta^{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha^{n+1} \geq \beta^{n+1}$.

$\boxed{\text{Ασκ}}$ $\alpha, \beta \geq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n \leq \frac{\alpha^n+\beta^n}{2}$

Αποδ $n=1 \rightsquigarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Εστω ότι ισχύει για $n \in \mathbb{N}$.

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n \leq \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha^{n+1}+\alpha^n\beta+\alpha\beta^n+\beta^{n+1}}{4} \underset{;}{\overset{(*)}{\leq}} \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}$

Παρατηρούμε ότι

$(*) \Leftrightarrow 2\alpha^{n+1} + 2\beta^{n+1} \geq \alpha^{n+1} + \alpha^n\beta + \alpha\beta^n + \beta^{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^{n+1} - \alpha^n\beta - \alpha\beta^n - \beta^{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^n(\alpha-\beta) - \beta^n(\alpha-\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha^n - \beta^n)(\alpha-\beta) \geq 0$.

Ασκ/Πρόταση

Εστω $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $n\in\mathbb{N}$. Νδο

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\,b^k \quad (*)$$

Αποδ

Για $n=1 \rightsquigarrow a-b=(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{0}a^0b^0=a-b$, ισχύει.

Εστω ότι για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ ισχύει η $(*)$. Τότε:

$$\begin{aligned}
a^{n+1}-b^{n+1} &= a^{n+1}-ab^n+ab^n-b^{n+1}=\\
&= a(a^n-b^n)+(a-b)b^n=\\
&\overset{(*)}{=} a(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k+(a-b)b^n=\\
&= (a-b)\cdot\left[a\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k+b^n\right]=\\
&= (a-b)\left[\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k}b^k+\underbrace{b^n}_{a^{n-n}b^n}\right]=\\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k
\end{aligned}$$

Ασκ.

Αν $0<a<b$, νδο

$$n\,a^{n-1}\le\frac{b^n-a^n}{b-a}\le n\,b^{n-1}$$

Αποδ. Εφαρμογή της προηγούμενης Άσκησης:

$$\frac{b^n-a^n}{b-a}=\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\,b^k$$

και

$$n\cdot a^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}a^k\le\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\,b^k\le\sum_{k=0}^{n-1}b^{n-1-k}\,b^k=n\cdot b^{n-1}$$

Ασκ/Πρόταση (Bernoulli) Αν $a>-1$, τότε $(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall n\in\mathbb{N}_0$

Απόδ. Έστω $a>-1$ ($\Rightarrow 1+a>0$)

$n=0 \rightsquigarrow 1\geq 1$, ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για n, δ.ν.δ. έστω ότι ισχύει

$(1+a)^n \geq 1+na \Rightarrow$ (πολ/ζω την ανισότητα με $1+a>0$)

$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+a^2 \geq 1+(n+1)a$ ∎

Ασκ/Πρόταση $\forall n\in\mathbb{N}_0$ $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}$ με $0<\varepsilon<1$ ισχύει
$(1+\varepsilon)^n < 1+3^n\cdot\varepsilon$.

Απόδ $n=0 \rightsquigarrow 1 < 1+\underbrace{3^0\cdot\varepsilon}_{>0}$ ✓.

Έστω ότι ισχύει για n.

$(1+\varepsilon)^n < 1+3^n\cdot\varepsilon \Rightarrow$

$$\underset{1+\varepsilon>0}{(1+\varepsilon)^{n+1} <} (1+3^n\cdot\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1+3^n\varepsilon+\varepsilon+3^n\cdot\varepsilon^2 =$$
$$= 1+(3^n\varepsilon+3^n+1)\varepsilon$$
$$< 1+(3^n+3^n+3^n)\varepsilon =$$
$$= 1+3\cdot 3^n\cdot\varepsilon = 1+3^{n+1}\cdot\varepsilon.$$ ∎

Ασκ

$$(1+a)^n < \frac{1}{1-na}, \quad \forall\, n \geq 1 \text{ και } 0<a<1/n$$

Απόδ.

Για $n=1$ και $0<a<1$, έχουμε

$$(1+a)^1 < \frac{1}{1-1\cdot a} \underset{(1-a>0)}{\iff} 1-a^2<1, \text{ που ισχύει.}$$

Εστω ότι ισχύει για $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $0<a<1/n$.
Παίρνουμε τώρα ένα $a \in \mathbb{R}$ με $0<a<\frac{1}{n+1}$, και παρατηρούμε ότι για αυτό το a ισχύει

$$0<a<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

δηλ. ισχύει η ανισότητα

$$(1+a)^n < \frac{1}{1-na}$$

κι επιπλέον, $1-(n+1)a>0$. Άρα:

$$(1+a)^n < \frac{1}{1-na} \overset{1+a>0}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow (1+a)^{n+1} < \frac{1+a}{1-na} \overset{\circledast}{\underset{;}{<}} \frac{1}{1-(n+1)a}, \text{ και}$$

$$\circledast \underset{\substack{1-na>0 \\ 1-(n+1)a>0}}{\iff} (1+a)(1-(n+1)a) < 1-na \iff$$

$$\iff 1+a-(n+1)a-(n+1)a^2 < 1-na$$

$$\iff 1+\cancel{a}-na-\cancel{a}-na^2-a^2 < 1-na$$

$$\iff -(n+1)a^2<0, \quad ✓$$

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-Α.7(γ)) $\forall\ 0 \le a \le 1,\quad n \ge 1$, ισχύει

$$1 - na \le (1-a)^n \le \frac{1}{1+na}$$

Αποδ

Bernoulli: $-1 < b \Rightarrow (1+b)^n \ge 1 + nb$.

$0 \le a \le 1 \Rightarrow -1 \le -a \le 0$

Αν $a = 1 \Rightarrow 1 - na = 1 - n \le (1-1)^n = 0^n = 0 \le \frac{1}{1+n}$ ✓

Αν $a < 1 \Rightarrow -1 < -a \Rightarrow$ ισχύει Bernoulli για $b = -a$:

$(1-a)^n \ge 1 + n(-a) = 1 - na, \quad \forall n \ge 1$

Η άλλη ανισότητα:

$n=1$: $1 - a \le \frac{1}{\underbrace{1+a}_{>0}} \Leftrightarrow 1 - a^2 \le 1 \Leftrightarrow -a^2 \le 0$

Έστω ότι ισχύει για n. (για $a=1$ ισχύει: για $a<1$:)

$$(1-a)^n \le \frac{1}{1+na} \Rightarrow$$

$$(1-a)^{n+1} \le \frac{1-a}{1+na} \overset{\circledast}{\underset{;}{\le}} \frac{1}{1+(n+1)a}$$

$\circledast \Leftrightarrow (1+(n+1)a)(1-a) \le 1 + na \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{1} - a + (n+1)a - (n+1)a^2 \le \cancel{1} + na$

$\Leftrightarrow -a + \cancel{na} + a - na^2 - a^2 \le \cancel{na}$

$\Leftrightarrow -(n+1)a^2 \le 0$ ισχύει.

Ασκ

(α) $-1<a<0 \Rightarrow (1+a)^n \leq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2, \quad \forall n \geq 1.$

(β) $a>0 \Rightarrow (1+a)^n \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2, \quad \forall n \geq 1.$

Απόδ (α) $n=1 \rightsquigarrow 1+a \leq 1+a+0.$ ✓

Εστω τώρα ότι $(1+a)^n \leq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Τότε:

$$(1+a)^n \leq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2 \xRightarrow{1+a>0}$$

$$(1+a)^{n+1} \leq \left(1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2\right)(1+a) =$$

$$= 1+na+a+na^2+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\frac{n(n-1)}{2}a^3 =$$

$$= 1+(n+1)a+na^2\left(1+\frac{n-1}{2}\right)+\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}a^3}_{<0} <$$

$$< 1+(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}a^2.$$

(β) $n=1 \rightsquigarrow 1+a \geq 1+a+0$ ✓.

Εστω ότι $(1+a)^n \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Τότε:

$$(1+a)^n \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2 \xRightarrow[1+a>0]{}$$

$$(1+a)^{n+1} \geq \left(1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2\right)(1+a) =$$

$$= \ldots = 1+(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}a^2+\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}a^3}_{>0} >$$

$$> 1+(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}a^2.$$

$\boxed{\text{Άσκ}}$ Έστω $x>0$, $n\geq 2$. Τότε:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{x}}+x \begin{cases} > n+1, & x\neq 1 \\ = & x=1 \end{cases}$$

Απόδ. Σταθεροποιώ $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$.

Εστω $x\neq 1$ θέτω $y:=\underbrace{\sqrt[m]{x}-1}_{\neq 0}>-1 \xRightarrow{\text{Bernoulli}}$

$\Rightarrow (1+y)^n > 1+ny, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \ n\geq 2$

$\xRightarrow[n=m+1]{\text{για}} (1+y)^{m+1} > 1+(m+1)y \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1+\left(\sqrt[m]{x}-1\right)\right)^{m+1} > 1+(m+1)\left(\sqrt[m]{x}-1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt[m]{x}\right)^{m+1} > \cancel{1}+m\sqrt[m]{x}-m+\sqrt[m]{x}-\cancel{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt[m]{x} > (m+1)\sqrt[m]{x}-m \Rightarrow$

$\Rightarrow x\sqrt[m]{x}+m > (m+1)\sqrt[m]{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+\dfrac{m}{\sqrt[m]{x}} > m+1.$

Παρατηρούμε ότι για $x=1$, έχουμε $y=0$ που ισοδυναμεί με την τελική ισότητα.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Στην ανισότητα Bernoulli, πότε ισχύει το ίσον;

Ασκ (Ν 2-15) Ανισότητα Weierstrass

Αν $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, τότε

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \forall n \geq 2$$

Απόδ

$k=2 \leadsto (1+a_1)(1+a_2) = 1+a_1+a_2+a_1a_2 > 1+(a_1+a_2)$ ✓

Έστω ότι ισχύει για $k=n$.

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow$$

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1}) > \left(1+\sum a_k\right)(1+a_{n+1}) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} + \underbrace{\left(\sum a_k\right)a_{n+1}}_{>0} >$$

$$> 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k .$$

[Παρατήρηση: Για $n=1$ ισχύει η ισότητα

$$1+a_1 = 1 + \sum_{k=1}^{1} a_k = 1 + a_1 \text{]}$$

Άσκηση/Πρόταση (Ανισότητα γεωμετρικού–αριθμητικού μέσου)

$n \in \mathbb{N}$. Αν $a_1, \dots, a_n$ θετικοί πραγμ. αριθμοί $\Rightarrow$

$n \geq 2$, $\underbrace{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}}_{\text{αριθμ. μέσος}} \geq \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}}_{\text{γεωμ. μέσος}}$

["=" για $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$].

Απόδ. $n = 2$

$\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1 a_2$ ✓

$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0$.

["=" για $a_1 = a_2$].

Έστω ότι ισχύει για n, δηλ.

$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ [και "=" για $a_1 = \cdots = a_n$].

Έστω $x_1, \dots, x_{n+1} > 0$.

1η περίπτωση: $x_1 \cdots x_{n+1} = 1 \Rightarrow x_1 \cdots x_n = \dfrac{1}{x_{n+1}}$.

$\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x_{n+1}}}$ (ίσον για $x_1 = \cdots = x_n$ $\Downarrow$ $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_1^n}$)

$\Downarrow$

$x_1 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \dfrac{n}{\sqrt[n]{x_{n+1}}}$

$\Downarrow$

$x_1 + \cdots + x_{n+1} \geq x_{n+1} + \dfrac{n}{\sqrt[n]{x_{n+1}}} \geq n+1$ Ασκ. σελ. Τ.10

$\Downarrow$

$\dfrac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n+1} = 1 = \sqrt[n+1]{1} = \sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_{n+1}}$ ✓

2η περίπτωση: $x_1, \dots, x_{n+1}$ τυχαία.

$$y_k := \frac{x_k}{\sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_{n+1}}}, \qquad k = 1, \dots, n+1 \Rightarrow$$

$$y_1 \cdots y_{n+1} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{y_1 + \cdots + y_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\underbrace{y_1 \cdots y_{n+1}}_{1}} \Rightarrow$$

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_{n+1}} \cdot 1. \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$ για $1/x_1, \dots, 1/x_n$:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdots x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \Rightarrow$$

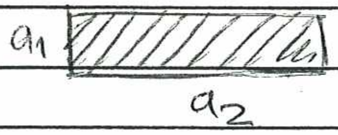
$$\Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Αρμονικός μέσος !!

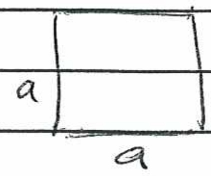
Γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου

$$a=\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2} \Longleftrightarrow$$

$$a^2 \geq a_1a_2$$



= Εμβ. παραλ/μου με πλευρές a_1, a_2.
περίμετρος $= 2a_1+2a_2 = 4a$.



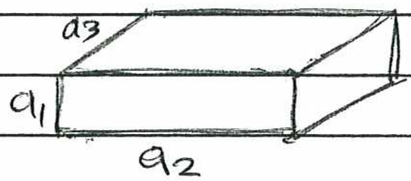
Σημασία της ανισότητας: από όλα τα ορθογ. παρ/μα με σταθ. περίμετρο $4a$ το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδό.

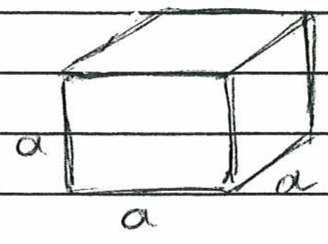
$$a=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \Longleftrightarrow$$

$$a^3 \geq a_1a_2a_3$$

= Όγκος ορθογώνιου παραλ/δου με πλευρές a_1, a_2, a_3.

Σημασία της ανισότητας: από όλα τα ορθογ. παραλ/δα με σταθερό άθροισμα πλευρών, ο κύβος έχει τον μεγαλύτερο όγκο.





Ασκ. (Γ-Α10) Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$\forall a_1,\dots,a_n,\ b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Αποδ. (1) Έστω $a_k, b_k \geq 0$ $\forall k=1,\dots,n$.

Για $n=1$ ισχύει ισότητα.

Για $n=2$:

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \le (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \iff$$

$$a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+2a_1b_1a_2b_2 \le a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2 \iff$$

$$a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2 \geq 0 \iff$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Έστω ότι ισχύει για $n \Longrightarrow$

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1}b_{n+1} \le \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}}_{x}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}}_{y} + a_{n+1}b_{n+1}$$

$$= xy + a_{n+1}b_{n+1} \le (x^2+a_{n+1}^2)^{1/2}(y^2+b_{n+1}^2)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + a_{n+1}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + b_{k+1}^2\right)^{1/2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2\right).$$

(2) Για τυχαία a_k, b_k:

$$\left(\Sigma a_k b_k\right)^2 = \left|\Sigma a_k b_k\right|^2 \leq \left(\Sigma |a_k b_k|\right)^2 =$$

$$= \left(\Sigma |a_k|\cdot|b_k|\right)^2 \overset{(1)}{\leq} \left(\Sigma |a_k|^2\right)\left(\Sigma |b_k|^2\right) =$$

$$= \left(\Sigma a_k^2\right)\left(\Sigma b_k^2\right).$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΜΟΡΦΗ:

$$\boxed{\Sigma a_k b_k \leq \left(\Sigma a_k^2\right)^{1/2} \cdot \left(\Sigma b_k^2\right)^{1/2}}$$

Β΄ Αποδ. Παρατηρούμε ότι για τυχαίο $x \in \mathbb{R}$:

$\forall k = 1, \dots, n$: $(a_k x + b_k)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2\right) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \Sigma b_k^2 \geq 0$$

(τριώνυμο ως προς x).

$\Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-Α.10 (β)). ΝΔ ανισότητα Minkowski:

$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}.$$

Απόδ.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k) + \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) b_k \overset{CS}{\leq}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left[\left(\sum a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum b_k^2 \right)^{1/2} \right] \cdot \left(\sum (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum b_k^2 \right)^{1/2}.$$

Ασκ (Γ-11) Ταυτότητα Lagrange:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}(a_k b_j - a_j b_k)^2 \quad (*)$$

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Μετά νδο Lagrange $\Rightarrow$ Cauchy-Schwarz.

Αποδ.

$n=1$ $\quad a_1^2 \cdot b_1^2 - (a_1 b_1)^2 = \frac{1}{2}(a_1 b_1 - a_1 b_1)^2$ ✓

$n=2$ $\quad (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 =$

$$= \frac{1}{2}\left[(a_1 b_1 - a_1 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 + (a_2 b_2 - a_2 b_2)^2\right]$$

$$\Longleftrightarrow a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2\right] =$$

$$= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2$$ ✓

Έστω (*). Τότε:

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + a_{n+1}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + b_{n+1}^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1}\right)^2 =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) + a_{n+1}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + b_{n+1}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2 -$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 - 2 a_{n+1} b_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} (a_k b_j - a_j b_k)^2 + a_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + b_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2 a_{n+1} b_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Εξ άλλου:

$$\frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n+1} (a_k b_j - a_j b_k)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sum_{k,j=1}^{n} (a_k b_j - a_j b_k)^2 + \sum_{j=1}^{n} (a_{n+1} b_j - a_j b_{n+1})^2 + \underbrace{(a_{n+1} b_{n+1} - a_{n+1} b_{n+1})^2}_{=0}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (a_k b_{n+1} - a_{n+1} b_k)^2 \Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sum_{k,j=1}^{n} (a_k b_j - a_j b_k)^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_{n+1}^2 b_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_j^2 b_{n+1}^2 - 2 \sum a_{n+1} a_j b_j b_{n+1} \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sum_{k,j=1}^{n} (a_k b_j - a_j b_k)^2 \Big] + a_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + b_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2 a_{n+1} b_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k .$$