ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ.

Αποδείξτε με χρήση του ορσ. ότι οι παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0:

(i) $a_n = \dfrac{n}{n^3+n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι $0 < a_n < \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 > 1/\varepsilon$, ισοδύναμα $1/n_0 < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0$:

$$-\varepsilon < 0 < a_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

(ii) $\beta_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$

Παρατηρούμε ότι

$$\beta_n = \frac{n^2+2-n^2-1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}.$$

Συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.

(iii) $\gamma_n = \begin{cases} 1/2^n, & n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ 1/(n^2+1), & \text{άλλως.} \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} 2^n = (1+1)^n \geq 1+n > n. \\ n^2+1 > n^2 \geq n \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \gamma_n < \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

και συνεχίζουμε όπως στο (i)

Ασκ.

Βρείτε τα όρια των προηγ. ακολουθιών, χρησιμοποιώντας τις γνωστές σας ιδιότητες.

Απαντ.

(i) $a_n = \dfrac{n}{n^3+n^2+1} = \dfrac{n/n^3}{\frac{n^3+n^2+1}{n^3}} = \dfrac{1/n^2}{1+1/n+1/n^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \to \dfrac{0}{1+0+0} = 0.$

(ii) $\beta_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}} =$

$= \dfrac{1/n}{\sqrt{1+2/n^2}+\sqrt{1+1/n^2}} \to \dfrac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = 0.$

(iii) Από την ανισότητα $0 < \gamma_n < 1/n$, με Θεώρ. ισοσυγκλινουσών.

$$\underset{0}{\downarrow}\qquad\qquad \underset{0}{\downarrow}$$

| Ασκ | Να βρεθούν τα όρια των:

(i) $a_n = \dfrac{3^n}{n!} \geq 0$

Κρ. λόγου:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \dfrac{3^{n+1}\cdot n!}{3^n\cdot(n+1)!} = \dfrac{3}{n+1} \to 3\cdot 0 = 0 < 1$

$\Rightarrow a_n \to 0.$

(ii) $\beta_n = \dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{2-1/n}{3+2/n} \to \dfrac{2-0}{3+0} = \dfrac{2}{3}$

(iii) $\gamma_n = n - \sqrt{n^2-n} = \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2-n} = \dfrac{n^2-n^2+n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} =$

$= \dfrac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \to \dfrac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \dfrac{1}{2}$

(iv) $\delta_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

παρατ: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \uparrow \Rightarrow$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < e \Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1+0}}{1+\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \delta_n < \underset{\substack{\downarrow \\ 1.}}{\sqrt[n]{e}}$$

(v) $\varepsilon_n = \left(\sqrt[n]{10}-1\right)^n$

κριτήριο ρίζας: $\sqrt[n]{\varepsilon_n} = \sqrt[n]{10}-1 \to 1-1=0<1$

$\Rightarrow \varepsilon_n \to 0.$

(vi) $\zeta_n = \frac{n^6}{6^n} > 0$

κρ. λόγου: $\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n} = \frac{(n+1)^6}{6^{n+1}} \cdot \frac{6^n}{n^6} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} =$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} \to (1+0)^6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} < 1$$

$\Rightarrow \zeta_n \to 0.$

(vii) $\eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Παρατ. ότι $\forall\ 1 \geq t \geq 0:\ 0 \leq \sin t \leq t$. Άρα:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq \eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} \quad \text{(ισοσυγκλ.)}$$

(viii) $\theta_n := \dfrac{\sin n}{n} = (\sin n)\cdot \dfrac{1}{n} =$ φραγμ. · μηδεν. $\to 0$.

(ix) $\kappa_n := \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n} > 0$.

Κρ. λόγου: $\dfrac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} = \dfrac{2^{n+1}\cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{2^n \cdot n!} =$

$$= \frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n} = 2\cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Longrightarrow \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \kappa_n \to 0$.

(x) $\lambda_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \dfrac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

(xi) $\mu_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$

Παρατ.: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n} < e \Rightarrow$

$$\underbrace{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\downarrow\ \sqrt{e}} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < \underbrace{\sqrt{e}}_{\downarrow\ \sqrt{e}}.$$

(xii) $\nu_n := \dfrac{n^2}{3n^2+n+1} = \dfrac{1}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \dfrac{1}{3+0+0} = \dfrac{1}{3}$

A5

(xiii) $\xi_n := \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n} > 0$

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{3}{e} > 1$$

$\Rightarrow \xi_n \longrightarrow +\infty.$

(xiv) $\pi_n := \dfrac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}$ = μηδεν. · φραγμ.

Άσκ 7 (Γιαν.)

Βρείτε τα όρια, αν υπάρχουν.

$$a_n = \frac{5^n + n}{6^n - n} = \frac{(5/6)^n + n/6^n}{1 - n/6^n} \longrightarrow \frac{0+0}{1-0} = 0,$$

διότι: $0 < 5/6 < 1 \Rightarrow (5/6)^n \longrightarrow 0.$

$$a'_n = n/6^n > 0 \qquad \frac{a'_{n+1}}{a'_n} = \frac{n+1}{6^{n+1}} \cdot \frac{6^n}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{6} \longrightarrow (1+0) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} < 1.$$

$\Rightarrow \dfrac{n}{6^n} \to 0.$

$$\beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$$

παρατ: $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}} < \beta_n < \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

και εφαρμόζουμε Θ. ισοσυγκλινουσών

$$\gamma_n = (\underbrace{\sqrt[n]{n} - 1}_{>0})^n > 0$$

κρ. ρίζας: $\sqrt[n]{\gamma_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 1 - 1 = 0 < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_n \to 0$

$$\delta_n := n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \right) =$$

$$= n^2 \frac{1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} = \frac{n^2 \cdot \frac{n+1-n}{n(n+1)}}{\sqrt{\;} + \sqrt{\;}} = \frac{\frac{n^2}{n^2+n}}{\sqrt{\;} + \sqrt{\;}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{\;} + \sqrt{\;}} \longrightarrow \frac{\frac{1}{1+0}}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = \frac{1}{1 + 1/n^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Έστω ότι $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε για $\varepsilon = 1/3 > 0$:
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \quad |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$

Οπότε:

$$1 < |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leq |\lambda_{n+1} - \lambda| + |\lambda_n - \lambda| < 1/3 + 1/3 = 2/3,$$

άτοπο.

$$\mu_n = \frac{n^n}{n!} > 0$$

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$$

$$\Rightarrow \mu_n \to +\infty.$$

$$\xi_n = \frac{(n!)^2\, 2^n}{(2n)!} > 0.$$

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^n} =$$

$$= \frac{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot \cancel{2^n} \cdot 2 \cdot (2n)!}{(2n+2)!\; n! \cdot n!\; \cancel{2^n}} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot 2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\cancel{2}(n+1)^{\cancel{2}}}{(2n+1)\cdot \cancel{2} \cdot \cancel{(n+1)}} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \xi_n \to 0.$$

Ασκ. Νδο $\nexists$ γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.
Δηλ νδο $\nexists\, (a_n)$: $a_n \in \mathbb{N}$ και $a_n \downarrow$.

Απόδ. Έστω ότι υπάρχει $a_n \downarrow$, $a_n \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Παίρνω
$\varepsilon := 1/3 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $a - 1/3 \leq a_n \leq a + 1/3$. $\forall\, n \geq n_0$
Στο διάστημα $(a-1/3,\ a+1/3)$ μόνο ένας φυσικός μπορεί να υπάρχει. Άρα $a_n = a_m$ $\forall\, n, m \geq n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_n)$ τελικά σταθερή $\Rightarrow a_n$ όχι $\downarrow$ ∎

Άσκ. $a_n \to a > 0 \Rightarrow$ τελικά $a_n > 0$.

(Τελικά: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n > 0$).

Απόδ. Έστω $\varepsilon := a/2 > 0$.

$0 \qquad a/2 \qquad a \qquad 3a/2$

$a_n \to a \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$\Updownarrow$

$0 < a/2 < a_n$.

Άσκ

(i) $a_n > 0$, $\mu > 1$: $a_{n+1} \geq \mu a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$

(ii) $0 < \mu < 1$, $|a_{n+1}| \leq \mu |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \to 0$

Απόδ.

(i) Έχουμε $a_2 \geq \mu a_1$, $a_3 \geq \mu a_2 \geq \mu^2 a_1$.

Αν $a_n \geq \mu^{n-1} a_1 \Rightarrow a^{n+1} \geq \mu a_n \geq \mu^n a_1$. Άρα

$a_n \geq \underbrace{\mu^{n-1}}_{\to +\infty} a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \to +\infty$

(ii) Με ανάλογο τρόπο, τώρα έχουμε

$0 < |a_n| \leq \mu^{n-1} |a_1| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$.

και $|a_n| \to 0$ από Θ. Ισοσυγκλ. $\Rightarrow a_n \to 0$.

Ασκ Έστω (a_n): $a_n \geq 0$.

(i) Αν $\exists\ 0 < \rho < 1$: $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \to 0$

(ii) Αν $\exists\ \rho > 1$: $\sqrt[n]{a_n} \geq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \to +\infty$.

Αποδ

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho \Rightarrow$

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0} \leq a_n \leq \underset{\downarrow\atop 0}{\rho^n} \Rightarrow a_n \to 0$$

από Θ. Ισοσυγκλ.

(ii) $\sqrt[n]{a_n} \geq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$a_n \geq \underset{\downarrow\atop +\infty}{\rho^n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \to +\infty.$$

Ασκ Να βρείτε για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακολουθία

$$a_n = \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n.$$

Απάντ. Παρατηρούμε ότι $0 \leq \left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \leq \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$.

— Αν $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| < 1 \Rightarrow a_n \to 0$

— Αν $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| = 1 \Rightarrow |1-x^2| = 1+x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{για } 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 = 1+x^2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow a_n = 1 \to 1. \\ \text{για } 1-x^2 < 0 \Rightarrow -1+x^2 = 1+x^2, \text{ αδύνατον.} \end{cases}$$

Ασκ (Γ-8)

(1) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Παρατηρώ: $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} > a_n > \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \Longrightarrow a_n \to 1.$

$\downarrow$ $\quad\quad\quad\quad$ $\downarrow$

1 $\quad\quad\quad\quad$ 1

(2) $b_n = \dfrac{1+2^2+3^3 \cdots + n^n}{n^n}$

Παρατηρώ:

$1 = \dfrac{n^n}{n^n} < b_n = \dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} \leq \dfrac{1+n^2+n^3+\cdots+n^n}{n^n} <$

$\downarrow$

1 $\quad\quad < \dfrac{1+n+n^2+\cdots n^n}{n^n} = \dfrac{1-n^{n+1}}{(1-n)n^n} =$

$= \dfrac{n^{n+1}-1}{n^{n+1}-n^n} = \dfrac{1-\frac{1}{n^{n+1}}}{1-\frac{1}{n}} \Longrightarrow b_n \to 1$

$\downarrow$

$\dfrac{1-0}{1-0} = 1.$

(3) $\gamma_n = \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)!}$

Παρατηρώ

$0 < \gamma_n \leq \dfrac{n+1}{n!}$

Από κριτήριο λόγου $\dfrac{n+1}{n!} \to 0 \Longrightarrow \gamma_n \to 0.$

(4) $\delta_n = \dfrac{1}{n^{2/3}} + \dfrac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^{2/3}}$

Παρατηρώ:

$\delta_n > \dfrac{n+1}{(2n)^{2/3}} = \dfrac{n+1}{(\sqrt[3]{2})^2 \cdot (\sqrt[3]{n})^2} > \dfrac{n}{(\sqrt[3]{2})^2 \cdot \sqrt[3]{n^2}} = \dfrac{n^{1/3}}{(\sqrt[3]{2})^2} \longrightarrow +\infty$

(A 11)

Ασκ Έστω $a>0$. Ν.δ.ο. $\left(b_n = \frac{1+na}{(1+a)^n}\right) \downarrow$ και κάτω φραγμένη και να προσδιορίσετε το όριο της.

Απάντ.

$b_n > 0$, άρα (b_n) κάτω φρ. από 0.

Επίσης:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+(n+1)a}{(1+a)^{n+1}} \cdot \frac{(1+a)^n}{1+na} = \frac{1+(n+1)a}{(1+a)(1+na)} =$$

$$= \frac{1+(n+1)a}{1+(n+1)a+na^2} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_{n+1} < b_n$ και $(b_n) \downarrow$.

Για το όριο, εφαρμόζουμε κρ. λόγου:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{na+(a+1)}{n(a+a^2)+(a+1)} = \frac{a+\frac{a+1}{n}}{a+a^2+\frac{a+1}{n}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{a+0}{a+a^2+0} = \frac{1}{1+a} < 1 \Rightarrow b_n \to 0.$$

Ασκ. Να εξετάσετε αν (και πού) συγκλίνουν οι αναδρομικές ακολουθίες:

(i) $a_1 = 3$ και $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{5}$.

Απάντ. $a_2 = 9/5 < a_1$.

Έστω $a_n < a_{n-1} \Rightarrow 2a_n < 2a_{n-1} \Rightarrow 2a_n+3 < 2a_{n-1}+3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2a_n+3}{5} < \frac{2a_{n-1}+3}{5} \Rightarrow a_{n+1} < a_n.$$

Άρα $(a_n) \downarrow$, και προφανώς κάτω φραγμ. από 0.

Σαν φθίνουσα και κάτω φραγμ. συγκλίνει σε $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim a_{n+1} = \frac{2\lim a_n+3}{5} \Rightarrow x = \frac{2x+3}{5} \Rightarrow 5x = 2x+3$$

$$\Rightarrow x = 1.$$

(ii) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2+1}{2a_n+2}$

[Παρατηρούμε ότι αν η (a_n) συγκλίνει σε $x \in \mathbb{R}$, τότε το x ικανοποιεί την

$$x = \frac{3x^2+1}{2x+2} \Rightarrow x = 1]$$

Έχουμε:

$a_1 = 0 < a_2 = 1/2 < a_3 = 7/12$, και

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n^2+1}{2a_n+2} - a_n = \frac{3a_n^2+1-2a_n^2-2a_n}{2a_n+2} =$$

$$= \frac{(a_n-1)^2}{2(a_n+1)} \geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow (a_n) \uparrow$$

[Αφού $(a_n)\uparrow$, συγκλίνει $\Leftrightarrow$ φραγμ., και μάλιστα το όριο της είναι το $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Όμως το όριο (αν υπάρχει) είναι $x = 1$].

$a_1 = 0 < 1$.

$a_n \leq 1 \Rightarrow 3a_n^2 + 1 = 2a_n^2 + a_n^2 + 1 < 2a_n + 1 + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{3a_n^2+1}{2a_n+2} < 1$$

και το 1 είναι άνω φρ. της (a_n).

Αύξουσα + άνω φρ. $\Rightarrow$ συγκλίνει σε $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $x = \dfrac{3x^2+1}{2x+2}$, κλπ.

(iii) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{2}$

$a_2 = 2 > 1$.

$a_n > a_{n-1} \Rightarrow \dfrac{3a_n+1}{2} > \dfrac{3a_{n-1}+1}{2} \rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow (a_n)\uparrow$

(A.13)

Η (a_n) είναι άνω φραγμ. $\Leftrightarrow$ συγκλίνει σε $x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα το $x = \lim a_n$ θα ικανοποιεί την

$$x = \frac{3x+1}{2} \Rightarrow x = -1, \text{ αδύνατον !}$$

Άρα όχι άνω φραγμ., όχι συγκλίνουσα $\Rightarrow a_n \to +\infty$.

(iv) $a_1 = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{3}{\theta}\right), \quad \theta > 0$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (άρα και (a_n) καλά ορισμένη).

Επίσης:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3},$$

και

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) - a_n = -\frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n} =$$

$$= \frac{3 - a_n^2}{2a_n} \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (a_n) \downarrow$ και κάτω φραγμ. από $\sqrt{3}$.

Άρα $a_n \to x \in \mathbb{R}$ με

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \sqrt{3}$, αφού $x = -\sqrt{3} < 0$ απορρίπτεται.

Άσκ

Έστω $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα όρια των:

(i) $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, (ii) $c_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ (για $a_n > 0$, $a > 0$)

(iii) $d_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ (για $a_n \neq 0$, $a \neq 0$).

Απάντ. Έστω $\varepsilon > 0$.

(i) $a_n \to a \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1 \; |a_n - a| < \varepsilon/2$.

Θέτω

$$\Sigma_0 := a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1} - n_1 a = \sum_{k=1}^{n_1} (a_k - a) \in \mathbb{R}$$

Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$, $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$n_2 > \frac{2|\Sigma_0|}{\varepsilon}$$

Οπότε:

$$\forall n \geq n_2 : \quad \frac{|\Sigma_0|}{n} < \varepsilon/2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ και έχουμε $\forall n \geq n_0$:

$$0 \leq |b_n - a| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - a \right| = \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - na \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a) \right| = \frac{1}{n} \left| \underbrace{\sum_{k=1}^{n_1} (a_k - a)}_{\Sigma_0} + \sum_{k=n_1+1}^{n} (a_k - a) \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\Sigma_0|}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=n_1+1}^{n} |a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot (n - n_1) <$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_n \to a$.

(iii) Για $a_n \neq 0$, $a \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{d_n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \xrightarrow[(i)]{} \frac{1}{a} \Rightarrow d_n \to a.$$

(ii) Αν επιπλέον $a_n > 0$, $a > 0$:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{b_n} \leq c_n \leq \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{d_n} \Longrightarrow c_n \to a.$$

<u>Εφαρμογή:</u> Έστω $a_n > 0$ με $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \rho$.
[Δηλ: υπόθ. του κρ. D'Alembert $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ υπόθ. του κρ. Cauchy].

Πράγματι, έστω $a_n > 0$ με $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho$. Θέτουμε
$b_1 = a_1$,
$b_k = \frac{a_k}{a_{k-1}}$, $\forall k \geq 2$.
Τότε:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\cancel{a_1} \cdot \frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_1}} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \frac{a_4}{\cancel{a_3}} \cdots \frac{\cancel{a_{n-1}}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}}} =$$

$$= \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_n} \xrightarrow{(ii)} \rho.$$

$\boxed{\text{Ασκ.}}$

(α) Έστω $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$. Νδο

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \longrightarrow \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = a$$

(β) Να υπολογίσετε το όριο της

$$x_n := \frac{1}{n} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n}$$

<u>Απόδ</u> (α) Παρατηρούμε ότι:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{a = \sqrt[n]{a^n}} \leq b_n \leq \sqrt[n]{k\, a^n} = \underset{\substack{\downarrow \\ a \cdot 1 = a}}{a \sqrt[n]{k}} \xRightarrow{\text{(ισοσυγκλ)}} b_n \to a.$$

(β) [Προσοχή! Το (α) δεν εφαρμόζεται εδώ, γιατί το πλήθος των προσθετέων δεν είναι σταθ.].

$$n = \sqrt[n]{n^n} < \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n} < \sqrt[n]{n \cdot n^n} = n \cdot \sqrt[n]{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow \atop 1}{1} < x_n < \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{n}} \underset{(\text{ισοσ.})}{\Longrightarrow} x_n \to 1.$$

$\boxed{\text{Ασκ.}}$ Να εξεταστεί ως προς το όριο η (x_n):
$x_n = \dfrac{[na]}{n}$, $a \in \mathbb{R}$.

Απάντ. $[na] \leq na < [na]+1 \Rightarrow$

$[na]-1 \leq \underbrace{na-1 < [na] \leq na}$ $\Rightarrow$

$$\underset{\downarrow \atop a-0=a}{a-\frac{1}{n}} < \frac{[na]}{n} \leq \underset{\downarrow \atop a}{a} \underset{(\text{ισοσ.})}{\Longrightarrow} x_n \to a.$$

$\boxed{\text{Ασκ.}}$ Έστω $x \in \mathbb{R}$. Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση η ακολουθία (a_n): $a_n = \underbrace{\eta\mu(\eta\mu(\ldots(\eta\mu x)))}_{n-\text{φορές}}$

Απάντ. Γνωρίζουμε ότι: $\forall y \in \mathbb{R}: 0 \leq |\eta\mu y| \leq |y|$.
Η (a_n) είναι αναδρομική: $a_1 = \eta\mu x$, $a_{n+1} = \eta\mu a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Άρα: $(|a_n|) \downarrow$ με κάτω φράγμα το 0,
επομένως $|a_n| \to \xi \in \mathbb{R}$ με $\xi = \eta\mu\xi \Rightarrow \xi = 0$.

Ασκ (Γ-22)

Έστω $a>0$, $x_1 \geq 0$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.
Ν.δ.ο. (x_n) είναι τελικά φθίνουσα και κάτω φρ. από $\sqrt{a}$.
Βρείτε το όριο.

Απόδ. $a, x_1 > 0 \Rightarrow x_n > 0$ άρα καλά ορισμένη.

Παρατ. ότι $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, και

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a - x_n^2}{x_n} \leq 0 \Rightarrow (x_n)\downarrow \text{ + κάτω φρ.}$$

Άρα $x_n \to x$ με $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2 = x^2 + a \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \underset{x \geq 0}{\Rightarrow} x = \sqrt{a}. \blacksquare$$

Ασκ (Γ-25)

Έστω $a_{n+1} - a_n \to a$. Ν.δ.ο. $\frac{a_n}{n} \to a$.

Απόδ. Θέτω $b_n = a_{n+1} - a_n \to a$. Τότε

$$\frac{a_n}{n} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1}{n}$$

$$= \frac{b_{n-1} + \cdots + b_1}{n} + \frac{a_1}{n} \to a + 0 = a. \blacksquare$$

A-18

|Ασκ| (Γ-26)

Έστω $(a_n)\uparrow$ με $b_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to a$.

Ν.δ.ο $a_n \to a$.

Αποδ. (1) Υποθ. $a_1 \geq 0 \Rightarrow a_n \geq a_1 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$b_n \to a \Rightarrow (b_n)$ άνω φρ. από $M \Rightarrow$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k = k b_k \leq kM \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

για $k=2n$

επειδή οι όροι είναι μη αρνητικοί

$$n a_n \leq a_{n+1}+\cdots+a_{2n} \leq a_1+a_2+\cdots+a_{2n} = 2n b_n \leq 2nM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n \leq 2M.$$

Άρα: $(a_n)\uparrow$ και άνω φρ. $\Rightarrow a_n \to x \Rightarrow$

$$b_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to x = a.$$

(2) Αν $a_1 < 0 \Rightarrow a_n' = a_n - a_1 \quad (\text{με } a_1' = 0)$

$$\Rightarrow (a_n')\uparrow$$

$$b_n' = \frac{a_1'+\cdots+a_n'}{n} = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} - a_1 \to a - a_1$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} a_n' \to a - a_1 \Rightarrow a_n - a_1 \to a - a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n \to a. \quad \blacksquare$$

Ασκ. Γ-13

$A \neq \emptyset$ άνω φρ. $\subseteq \mathbb{R}$, $\sup A = a \in \mathbb{R}$.

Νδο $\exists\ (a_n)$ με $a_n \in A$ και $a_n \to a$.

Αν, επιπλέον $\sup A \notin A$, $\exists\ (a_n) \uparrow$ με $a_n \in A$ και $a_n \to a$.

Απόδ. Παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon = 1/n > 0 \Rightarrow \exists\ a_n \in A : \underset{\downarrow\ a}{a - 1/n} < a_n \leq \underset{\downarrow\ a}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\ a_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \to a$$

Αν επιπλέον $a \notin A$:

$\varepsilon_1 = 1 > 0 \rightsquigarrow \exists\ a_1 \in A : \quad a - 1 < a_1 < a$

$\varepsilon_2 := \min\{a - a_1, 1/2\} \quad \exists\ a_2 \in A : a_1 \leq a - \varepsilon_2 < a_2 < a$

$\Downarrow$

$a - \varepsilon_2 \geq a_1$

$\varepsilon_3 := \min\{a - a_2, 1/3\} \quad \exists\ a_3 \in A : a_2 \leq a - \varepsilon_3 < a_3 < a$

$\Downarrow$

$a - \varepsilon_3 \geq a_2$

και επαγωγικά: $\exists\ a_n \in A : \quad a_{n-1} \leq \underbrace{a - \varepsilon_n}_{\downarrow\ a} < a_n < a$

$$\underset{\downarrow\ 0}{0} \lneq \varepsilon_n \leq \underset{\downarrow\ 0.}{1/n}$$

Ασκ (Γ-14)

Ν.δο κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι όριο $(q_n)\uparrow$ ρητών και $(a_n)\uparrow$ αρρήτων.

Αποδ Με προσχ. κατασκευή και επιλογή ρητού ή αρρήτου.

$\exists\, q_1 \in \mathbb{Q}: \quad x-1 < q_1 < x$

$\exists\, q_2 \in \mathbb{Q}: \; q_1 \leq x-\varepsilon_2 < q_2 < x, \qquad \varepsilon_2 = \min\{x-q_1, 1/2\}.$

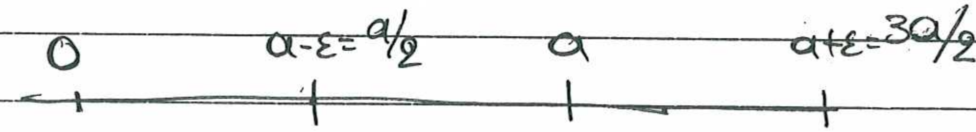
κ' επαγωγικά

$\exists\, q_n \in \mathbb{Q}: \quad q_{n-1} \leq x-\varepsilon_n < q_n < x \qquad \varepsilon_n = \min\{x-q_{n-1}, 1/n\}$

Ασκ (Γ-15)

(a_n) με $a_n > 0$, $a_n \to a > 0 \Rightarrow \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0.$

Αποδ. $\varepsilon = a/2 > 0 \to \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 \quad a_n > a-\varepsilon = a/2.$



$m := \min\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}\} > 0$ κάτω φρ. των $a_1, \ldots, a_{n_0-1}$

$a/2 = a-\varepsilon$ κάτω φρ. των a_n, $n \geq n_0$

$0 < \mu := \min\{m, a/2\}$ κάτω φρ. όλων.

A,21

Ασκ (Γ-17)

Ν.δ.ο $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε $y \in \mathbb{R}$

Αποδ.

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$- \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \dots - \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} =$$

$$= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(\ )(\ )} > 0 \Rightarrow y_n \uparrow$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{άνω φρ.} \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-28)

Υπολογίστε τα όρια:

(i) $a_n = \left[\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n}$

Θέτουμε

$x_n := \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \Rightarrow$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{(n!)(n!)}{(2n)!} =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot 2\cdot (n+1)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4+2/n}{1+1/n} \to \frac{4+0}{1+0} = 4$$

Άρα (βλ. Εφαρμογή, σελ. A.15)

$a_n = \sqrt[n]{x_n} \to 4.$

(ii) $\beta_n = \dfrac{1}{n}\left[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\right]^{1/n}$

Θέτουμε

$y_n := \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+2)(n+3)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^n\,(n+1)^2} \cdot n^n = \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{4+2/n}{1+1/n} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{4+0}{1+0} \cdot \frac{1}{e} = 4/e.$$

Όπως προηγουμένως:

$\beta_n = \sqrt[n]{y_n} \to 4/e.$

(iii) $\gamma_n = \left[\dfrac{2}{1}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^4\cdots\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}$

Θέτουμε:

$$z_n := \frac{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(2/1)\cdot(3/2)^2\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{(2/1)\cdot(3/2)^2\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to e$$

Οπότε και $y_n = \sqrt[n]{z_n} \to e$

$\boxed{Ασκ}$ (Γ-29)

Έστω (a_n): $\forall k \in \mathbb{N}$: $a_k \neq 0$ και $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k\}$ είναι πεπερ. Νδο $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Αποδ

Έστω $\varepsilon > 0$

Από Αρχιμ. ιδιότητα του $\mathbb{N}$: $\exists\, k \in \mathbb{N}$ με $1/k < \varepsilon$.

A_k = πεπερ. $\Rightarrow \exists \max A_k = m_0 \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $n_0 := m_0 + 1$.

Τότε:

$\forall n \geq n_0$: $a_n \notin A_k \Rightarrow$

$\forall n \geq n_0$: $|a_n| > k \Rightarrow$

$\forall n \geq n_0$: $0 < \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{k} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{|a_n|} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0.$

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-30)

Υπολογίστε τα όρια: $\left[x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow e \right]$

(1) $a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1} \longrightarrow e$

(2) $b_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^n =$

$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$

$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow e \cdot 1 \cdot e = e^2$

(3) $c_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \qquad n>1$

παρατηρώ:

$\frac{1}{c_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{n-1} \longrightarrow e \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_n \longrightarrow 1/e$

(4) $d_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e}\cdot e = 1$

(5) $\zeta_n = \left(1+\frac{2}{3n}\right)^n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n}}$

$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \overset{(?)}{\Longrightarrow} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} \longrightarrow e \right.$

$\overset{(?)}{\Longrightarrow} \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{3n} \longrightarrow e^2$

$\left. \overset{(?)}{\Longrightarrow} \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{n} \longrightarrow \sqrt[3]{e^2} \right]$

(5*) Νδο $\forall\, p/q \in \mathbb{Q}$

$\xi_n = \left(1+\frac{p/q}{n}\right)^n \longrightarrow \sqrt[q]{e^p}$

Λύση της (5):

$$z_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι

$$\underset{\downarrow \atop e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} < \left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1} < \underset{\downarrow \atop e}{e}$$

και

$$z_n = \left(\frac{3n+2}{3n}\right)^n = \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n =$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{3n} \cdot \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{3n}} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{3n+2} \cdot \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{3n}}$$

$$\to \sqrt[3]{e \cdot 1 \cdot e} = e^{2/3}.$$

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-32)

$0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) ΝΔΟ $(a_n) \uparrow$ και $(b_n) \downarrow$

(β) ΝΔΟ (a_n) και (b_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Αποδ

(α) Παρατηρώ: $a_n, b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

και $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n \Rightarrow (a_n) \uparrow$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{2b_n}{2} = b_n \Rightarrow (b_n) \downarrow$$

a_1 κάτω φρ. της (b_n) και b_1 άνω φρ. της (a_n)

$\Rightarrow$

$$a_n \to \underset{\neq 0.}{a} \leq b \leftarrow b_n.$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ b}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{2} \to \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2b = a + b \Rightarrow a = b.$$

[ανάλογα: $\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{a_{n+1}} = \sqrt{a_n b_n} \to \sqrt{ab} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = ab \Rightarrow a = b$].

$(a \neq 0$, αφού $a \geq a_1 > 0)$.