ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΣ $X, Y \neq \emptyset$ Συνάρτηση από X στο Y είναι μια σχέση από το X στο Y ($: f \subseteq X \times Y$) :

$\forall x \in X \ \exists! \, y \in Y$ με $(x,y) \in f$.

Γράφουμε $f: X \to Y$, $f(x) = y$.

X = πεδίο ορσ., Y = πεδίο τιμών $f(X)$ = εικόνα.

ΟΡΣ $f: X \to Y$ 1-1 $\iff [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

$\iff [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$.

$f: X \to Y$ επί $\iff \forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$

$\iff f(X) = Y$.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$, x = άγνωστος, y = παράμετρος
Αν $f(x) = y$ έχει λύση για κάθε $y \Rightarrow f$ επί.
Αν, όταν υπάρχουν λύσεις, είναι μοναδικές $\Rightarrow f$ 1-1.

ΟΡΣ $f: X \to Y$, $g: W \to Z$ με $f(X) \subseteq W$. Τότε

$\exists \, g \circ f : X \to Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

που λέγεται σύνθεση των f, g

ΟΡΣ $f: X \to Y$

(i) $\forall A \subseteq X$ εικόνα του A $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$

(ii) $\forall B \subseteq Y$ αντίστροφη εικόνα του B.

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$$

Παρατήρηση! $\exists f^{-1}(B)$, ακόμη και όταν $\not\exists f^{-1}$

Πρόταση 1 $f: X \to Y$

(i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(ii) $A_1, A_2 \subseteq X \Rightarrow f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ και

$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(iii) $A \subseteq X \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Πρόταση 2. $f: X \to Y$

(i) $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

(ii) $B_1, B_2 \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

και $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(iii) $B \subseteq Y \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(iv) $B \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

ΟΡΣ $f: X \to Y$ συνάρτηση 1-1. Μπορεί να θεωρηθεί και επί του $f(X)$. Τότε $\forall y \in f(X)\ \exists!\ x \in X : f(x) = y$

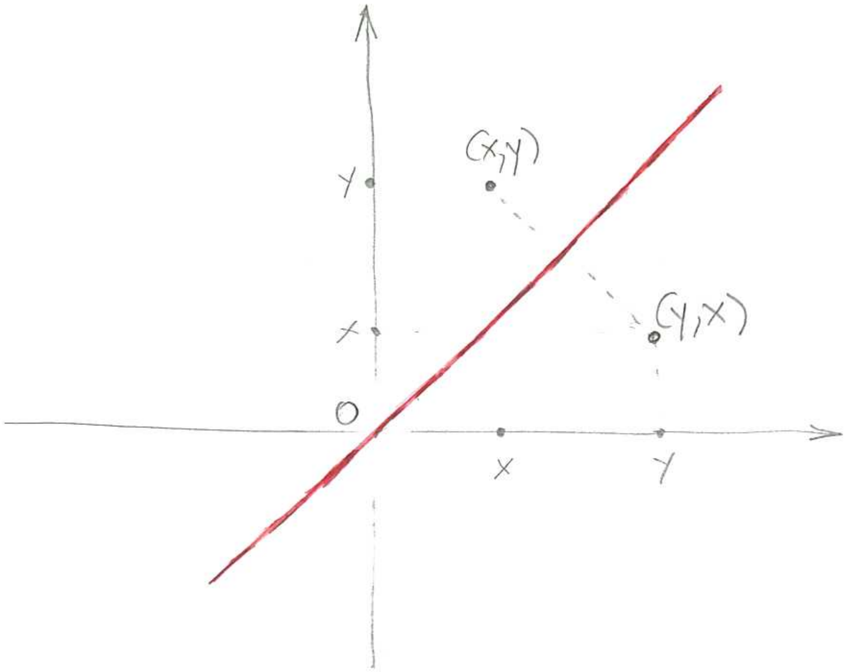
$f^{-1}(y) = x$.

Η f^{-1} είναι καλά ορ. συνάρτηση: $f(X) \to X$ και λέγεται αντίστροφη της f. (Συμμετρία: βλ. Σχήμα 1)

Πρόταση $f: X \to Y$ 1-1. Τότε

(i) $\exists f^{-1} \circ f : X \to X$ και $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \ \forall x \in X$

(ii) $\exists f \circ f^{-1} : f(X) \to f(X)$ και $f \circ f^{-1}(y) = y, \ \forall y \in f(X)$.



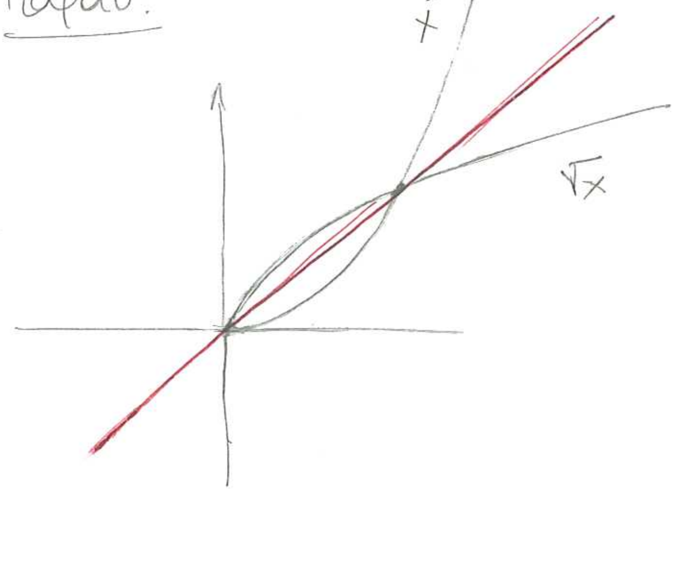
$f(x)=y \rightsquigarrow (x,y)\in f$

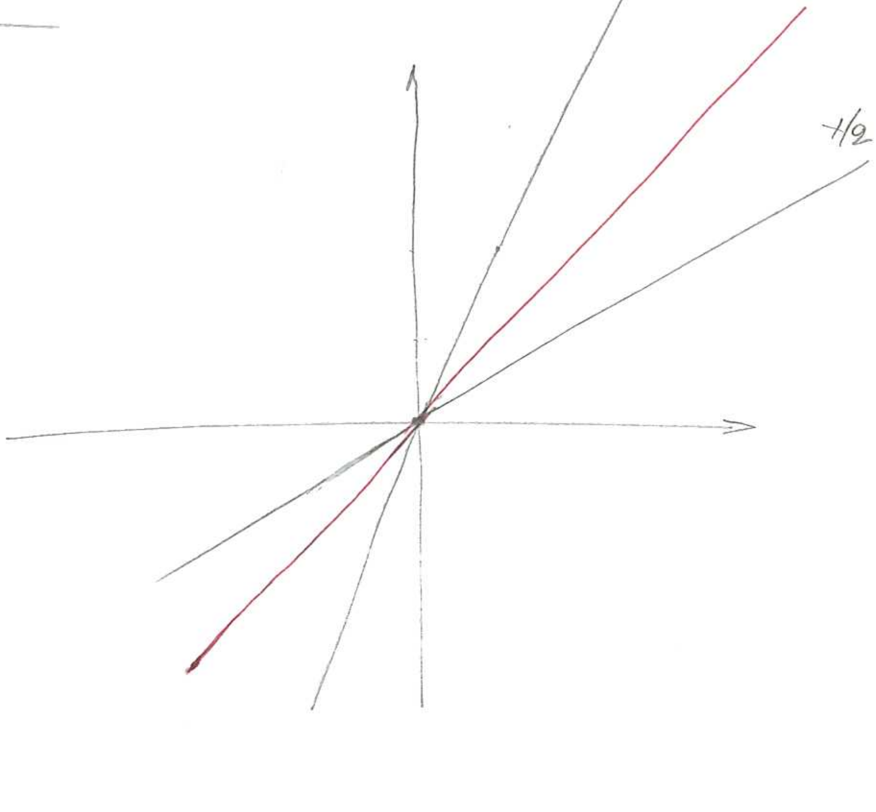
$f^{-1}(y)=x \rightsquigarrow (y,x)\in f^{-1}$

(x,y), (y,x) συμμετρικά ως προς 1η διχοτόμο.

Σχ. 1.

Παραδ:





ΟΡΣ. $f, g : \underset{\neq \emptyset}{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζονται:

$f+g : A \to \mathbb{R} : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\lambda f : A \to \mathbb{R} : (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$fg : A \to \mathbb{R} : (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$f/g : A \to \mathbb{R} : (f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad$ (για $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$).

Επίσης, λέμε $f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \ \forall x \in A$.

ΟΡΣ. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται:

(i) αύξουσα ($f \uparrow$) $\iff$ $[x, y \in A$ με $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]$.

(ii) γνησίως αύξουσα ($f \Uparrow$) $\iff$ $[x, y \in A$ με $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$.

(iii) φθίνουσα ($f \downarrow$) $\iff$ $[x, y \in A$ με $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)]$

(iv) γνησίως φθίνουσα ($f \Downarrow$) $\iff$ $[x, y \in A$ με $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)]$.

(v) μονότονη, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

(vi) γνησίως μονότονη, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

ΕΡΩΤ. $f(x) = 1/x$ 1-1; επί; μονότονη;

ΟΡΣ. Μια $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται φραγμένη $\iff$ $\iff \exists\, m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in A \iff$ $\iff \exists\, N > 0 : |f(x)| \leq N, \ \forall x \in A$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>άρτια</u> $\iff f(x) = f(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}$
<u>περιττή</u> $\iff f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

π.χ.: $x^2, x^4, |x|, \cos x$: άρτιες (Συμμετρία: βλ. Σχ.2)
$x, x^3, \sin x$: περιττές (— " — Σχ.3)

<u>Παρατ.</u> Ο ορσ. άρτιων/περιττών συναρτήσεων μπορεί να επεκταθεί για συναρτήσεις με π.ο. $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι <u>συμμετρικό</u> ως προς το $0 \in \mathbb{R}$, δηλ. όταν

$$x \in A \iff -x \in A$$

π.χ. $f(x) = 1/x$, $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>περιοδική με περίοδο T</u>, αν $\exists\, T \neq 0$:
$f(x+T) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

π.χ: $\cos x$, $\sin x$, με περίοδο $T = 2\pi$
$x - [x]$, με $T = 1$.

<u>Παραδείγματα συναρτήσεων:</u>

(1) Ακολουθίες: $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

(2) Πολυωνυμικές : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

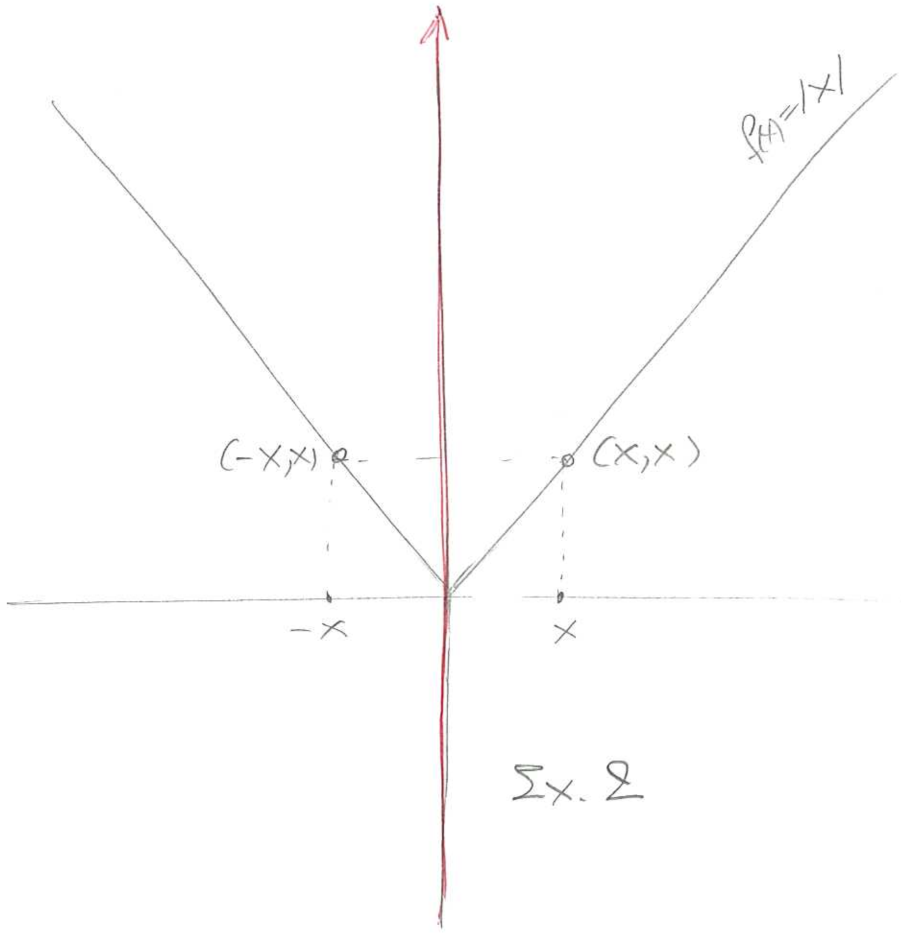
όπου $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

(3) Ρητές : $f(x) = p(x)/q(x)$, όπου p, q πολυωνυμικές και π.ο. της f <u>δεν</u> περιλαμβάνει ρίζες της q.

(4) Αλγεβρικές: ικανοποιούν μια εξίσ. της μορφής

$$p_0(x) + p_1(x) f(x) + p_2(x)[f(x)]^2 + \cdots + p_n(x)[f(x)]^n = 0$$

όπου $p_i(x)$ πολυωνυμικές.



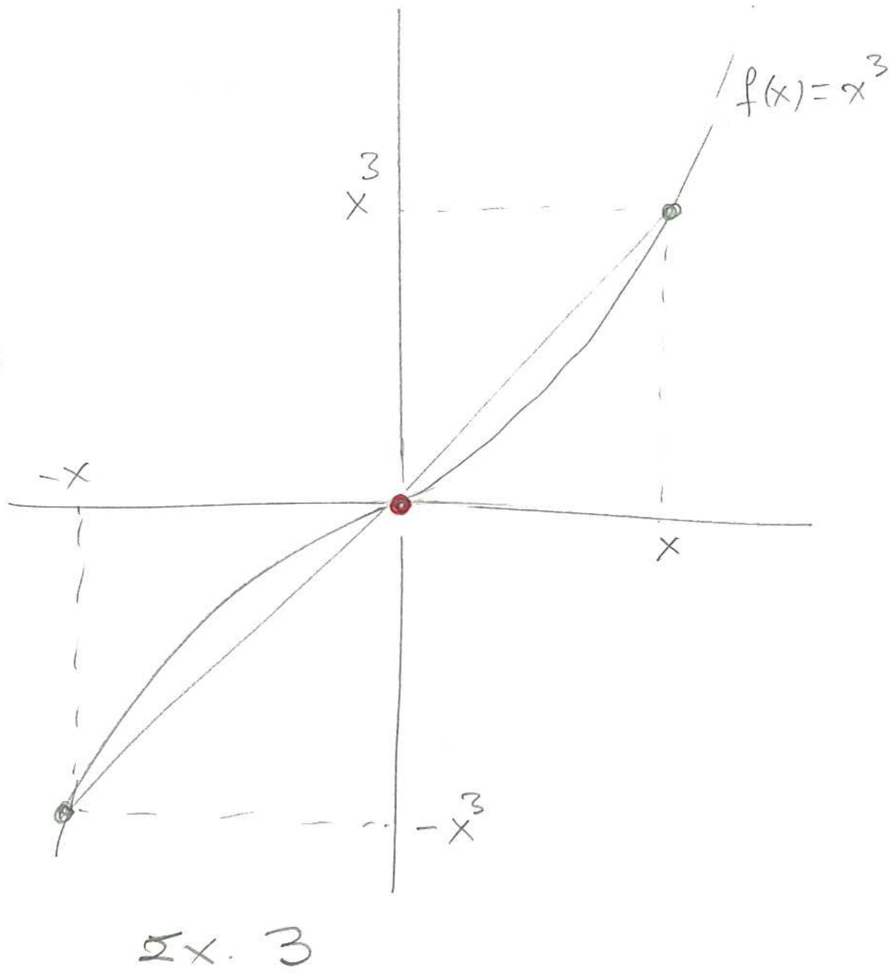
$f(x)=|x|=$ άρτια:

συμμετρική

ως προς

$y'Oy$

Σχ. 2



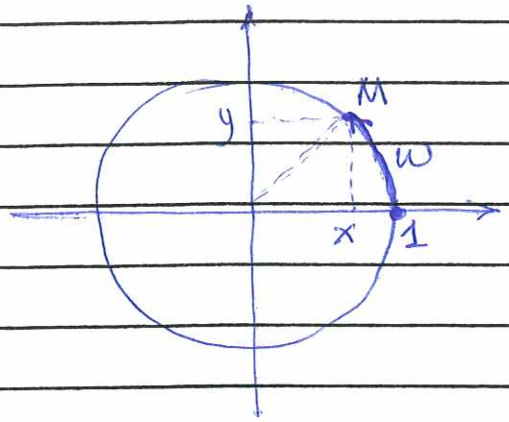
$f(x)=x^3=$ περιττή:

συμμετρική ως

προς O

Σχ. 3

(5) Τριγωνομετρικές:



$\cos\omega := x$

$\sin\omega := y$

$\tan\omega := \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$

$\cot\omega := \dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

(i) $|\sin\omega|, |\cos\omega| \leq 1$.

(ii) $\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$

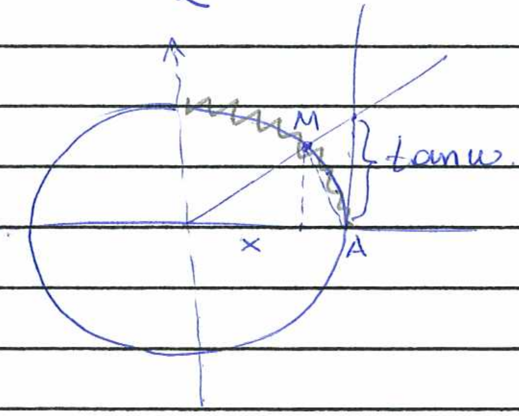
(iii) $\cos(\pi/2 - \omega) = \sin\omega$, $\sin(\pi/2 - \omega) = \cos\omega$.

(iv) $\cos(\pi - \omega) = -\cos\omega$

(v) $\cos(-\omega) = \cos\omega$, $\sin(-\omega) = -\sin\omega$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $\cos\omega$, $\sin\omega$ περιοδικές με ελάχιστο $T = 2\pi$.
$\sin\omega$ περιττή, $\cos\omega$ άρτια.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $\forall\ 0 < \omega < \pi/2$: $0 < \sin\omega < \omega < \tan\omega$.



$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (*)

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

ΠΟΡΙΣΜΑ $(a=b)$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$

$\sin 2a = 2\sin a \cos a.$

Πρόταση $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \quad (*)$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \quad (**).$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$$

6 Εκθετική συνάρτηση

$a>0, \quad x\in\mathbb{R} \Rightarrow a^x = ?$

(i) $a^0 = 1$

$a^{n+1} = a\cdot a^n, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$ $\quad (x \in \mathbb{N})$

(ii) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ $\quad (x\in\mathbb{Z}).$

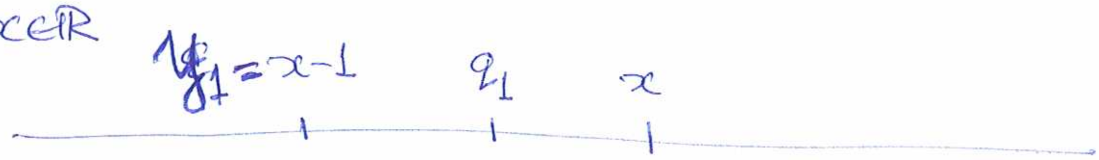
(iii) $\exists\ \sqrt[n]{a}, \ \forall\, n\in\mathbb{N}$ $\quad (x\in\mathbb{Q}).$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^{m/n} := (\sqrt[n]{a})^m$

Αποδ. Λήμματος

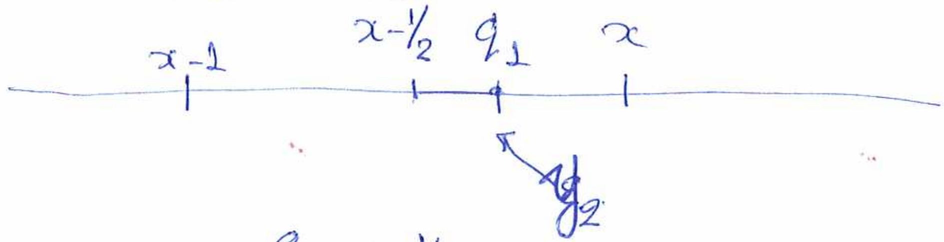
$x \in \mathbb{R}$

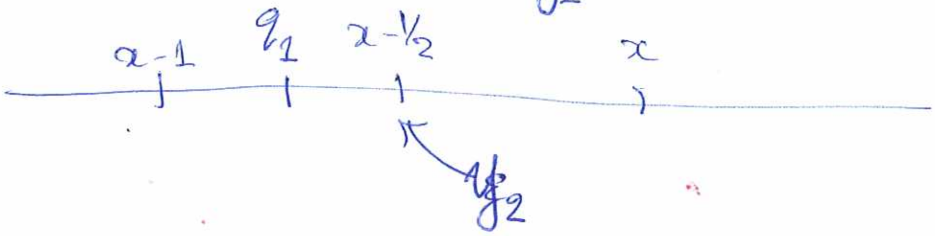


$y_1 = x-1$

$\exists\ q_1 \in \mathbb{Q} : \underbrace{x-1}_{= y_1} < q_1 < x$

$y_2 = \max\{q_1, x - 1/2\}$





$\exists\ q_2 \in \mathbb{Q} : y_2 < q_2 < x \Rightarrow q_1 \le q_2$ και

$x - 1/2 < q_2 < x$

επαγωγικά

$\exists\ q_n \in \mathbb{Q} : x - 1/n < q_n < x$

$x - 1/n, q_{n-1} \le y_n < q_n < x$

$q_n > q_{n-1} \Rightarrow (q_n) \uparrow$

$x - 1/n < q_n < x \Rightarrow q_n \to x$

(iv) a^x με $x \in \mathbb{R}$??

Λήμμα (ΑΣΚ.)

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (r_n)\uparrow : r_n \in \mathbb{Q}$ και $r_n \to x$.

Παρατ:

$r_1 < r_2 \in \mathbb{Q} \xRightarrow{a>1} a^{r_1} > a^{r_2}$

$r_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad r_2 = \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow r_1 = \frac{n_2 m_1}{n_1 n_2} < r_2 = \frac{n_1 m_2}{n_1 n_2}$

$\Rightarrow n_2 m_1 < n_1 m_2 \Rightarrow a^{n_2 m_1} < a^{n_1 m_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n_1 n_2]{a^{n_2 m_1}} < \sqrt[n_1 n_2]{a^{n_1 m_2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{n_2 m_1 / n_2 n_1} < a^{n_1 m_2 / n_1 n_2} \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$

ΟΡΣ $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$\left.\begin{array}{l} \exists (q_n)\uparrow : q_n \in \mathbb{Q} \text{ και } q_n \to x. \\ \exists q \in \mathbb{Q} : x < q \end{array}\right\} \Rightarrow (a^{q_n})\uparrow$ και φραγμ: $a^{q_n} < a^q$

$\Rightarrow a^{q_n} \to \xi \in \mathbb{R}$ θέτω $a^x = \xi$

ΕΡΩΤ. καλός ορσ?? $\mathbb{Q} \ni q_n \to x$, $\underset{\mathbb{Q}}{r_n} \to x \overset{??}{\Rightarrow}$

$a^{q_n} \to \xi \leftarrow a^{r_n}$??

Λήμμα (q_n) : $q_n \in \mathbb{Q}$ και $q_n \to 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} a^{q_n} \to 1$.

Απόδ $\underset{\overset{\|}{x_n}}{\sqrt[n]{a}}, \underset{\overset{\|}{y_n}}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$, $a > 1$

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \quad 1-\varepsilon < y_n < 1 < 1+\varepsilon$

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \quad 1-\varepsilon < 1 < x_n < 1+\varepsilon$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$:

$$1-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt[n]{a}} < 1 < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon. \quad \text{ή}$$

$$1-\varepsilon < a^{-1/n} < a^{1/n} < 1+\varepsilon.$$

$\varepsilon' := 1/n_0 > 0 \overset{q_n \to 0}{\Longrightarrow} \exists\, n_3 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_3 \quad -\varepsilon' = -1/n_0 < q_n < 1/n_0 = \varepsilon'$

Άρα : $\forall n \geq n_3$

$$1-\varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{q_n} < a^{1/n_0} < 1+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$a^{q_n} \to 1 \quad \blacksquare$$

Πόρισμα $r_n, q_n \in \mathbb{Q}$ και $r_n \to x$, $q_n \to x$

(q_n) όπως στον ορισμό, (r_n) τυχαία $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^{r_n} \to \xi$.

Απόδ. $r_n \to x$, $q_n \to x \Rightarrow r_n - q_n \to 0 \Rightarrow$

$a^{r_n} = a^{r_n - q_n + q_n} = a^{r_n - q_n} \cdot a^{q_n} \to 1 \cdot \xi = \xi \quad \blacksquare$

Συμπέρασμα: Αν $\exists\ (q_n)$ στο $\mathbb{Q}$ με $q_n \to x \in \mathbb{R}$ και $a^{q_n} \to \xi \in \mathbb{R}$ $(a>0)$, τότε:
$\forall\ (r_n) \in \mathbb{Q}$ με $r_n \to x$: $a^{r_n} \to \xi$.

ΠΡΟΤ. $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:
(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$
(iii) $a^{-x} = 1/a^x$.
(iv) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

ΠΡΟΤ. $a > 0$.
Αν $a > 1 \Rightarrow a^x \uparrow$
Αν $0 < a < 1 \Rightarrow a^x \downarrow$.