Θεωρούμε στο $\mathbb{Z}$ την εξίσωση $ax=b$. Αν έχει λύση, αυτή συμβολίζεται με $x=b/a$. Παρατηρούμε ότι $\forall b\in\mathbb{Z}$, $\forall a,k\in\mathbb{N}$: $b/a = kb/ka$, δηλ. οι εξισώσεις $ax=b$ και $(ka)x=kb$ έχουν την ίδια λύση. Αν δεν υπάρχει λύση στο $\mathbb{Z}$;

Εισάγουμε την σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$:

$$(a,n)\sim(b,m) \iff am=bn$$

και συμβολίζουμε με $\frac{a}{n}$ την κλάση $[(a,n)]$, και με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας.

Στο $\mathbb{Q}$ ορίζονται:

→ Πρόσθεση: $\frac{a}{n}+\frac{b}{m}=\frac{am+bn}{mn}$

που είναι:

(1) μεταθετική: $\forall p,q\in\mathbb{Q}$: $p+q=q+p$.

(2) προσεταιριστική: $\forall p,q,r\in\mathbb{Q}$: $p+(q+r)=(p+q)+r$.

(3) Έχει ουδέτερο στοιχείο, το $0\equiv[(0,1)]=\frac{0}{1}$

(4) κάθε $q=\frac{a}{n}\in\mathbb{Q}$ έχει αντίθετο,

το $-q=\frac{-a}{n}$, με $q+(-q)=(-q)+q=0$.

→ Πολλαπλασιασμός: $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} = \frac{ab}{mn}$

που είναι

(1) μεταθετικός: $pq = qp$, $\forall p, q \in \mathbb{Q}$

(2) προσεταιριστικός: $p(qr) = (pq) \cdot r$ $\forall p, q, r \in \mathbb{Q}$

(3) έχει ουδέτερο στοιχείο, το $1 \equiv [(1,1)] = \frac{1}{1}$,

με $1p = p \cdot 1 = p$, $\forall p \in \mathbb{Q}$.

(4) κάθε $q \neq 0$ έχει αντίστροφο:

$1/q = [(n, a)]$, αν $a > 0$ και

$1/q = [(-n, |a|)]$, αν $a < 0$.

Οι δύο πράξεις συνδέονται με την επιμεριστική ιδιότητα:

$p(q+r) = pq + pr$, $\forall p, q, r \in \mathbb{Q}$.

Άρα η τριάδα $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ είναι σώμα.

→ Διάταξη: $p \leq q \iff \exists\, r = [(a, n)] \in \mathbb{Q}$ με

$a > 0$ και $p = q + r$, συμβατή με τις πράξεις:

$p \leq q \iff p + r \leq q + r$

$p \leq q \iff pr \leq qr$ $(r > 0)$

$\boxed{\text{Λήμμα}}$ Κάθε $q \in \mathbb{Q}$ γράφεται με <u>ανάγωγη μορφή</u>, δηλ $\exists\ a \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$: $q = \frac{a}{n} = [(a,n)]$, όπου ο μόνος κοινός διαιρέτης των a και n να είναι το 1.

<u>Απόδειξη.</u>

Έστω $q \in \mathbb{Q}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\underbrace{E(q)}_{\neq \emptyset} = \{ k \in \mathbb{N} : \exists\ b \in \mathbb{Z} \text{ με } q = \frac{b}{k} \} \subseteq \mathbb{N}$$

Από την Αρχή Ελαχίστου το $E(q)$ έχει ελάχιστο στοιχείο $n \in E(q)$ με αντίστοιχο $a \in \mathbb{Z}$ ώστε $q = \frac{a}{n}$.

Ισχυριζόμαστε ότι το $\frac{a}{n}$ είναι ανάγωγο:

Πράγματι, αν $\exists\ \underset{\neq 1}{p \in \mathbb{N}}$: $p | a$ και $p | n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ a_1 \in \mathbb{Z}$ και $n_1 \in \mathbb{N}$: $a = pa_1$ και $n = pn_1$

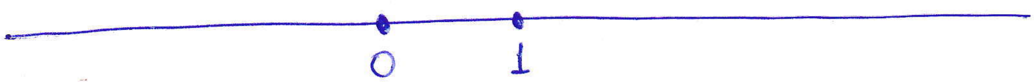
Όμως τότε $(a,n) = (pa_1, pn_1) \sim (a_1, n_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow [(pa_1, pn_1)] = [(a_1, n_1)] = q$.

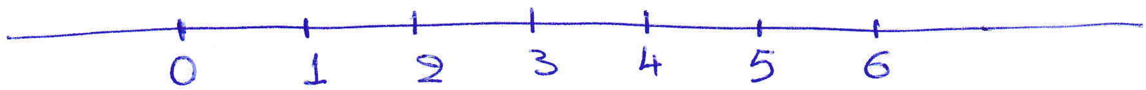
Άρα $n_1 < n$ με $n_1 \in E(q)$, άτοπο.

Παράσταση ρητών σε ευθεία:

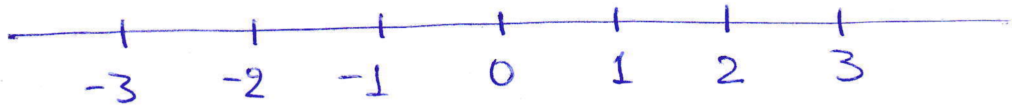
Επιλέγουμε σε μια ευθεία δύο σημεία $0 \neq 1$.



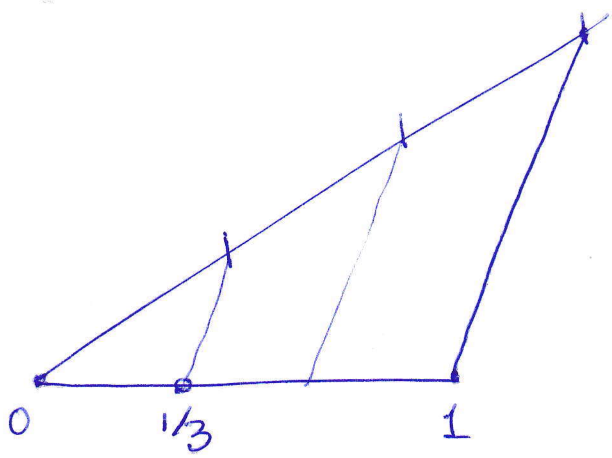
Με διαβήτη χαράζουμε ίσα αποστάσεις δεξιά, και παίρνουμε παράσταση του $\mathbb{N}$:



Επαναλαμβάνοντας αριστερά, έχουμε παράσταση του $\mathbb{Z}$:

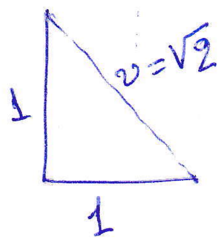


Χωρίζοντας το $[0,1]$ σε n ίσα τμήματα, παίρνουμε παράσταση του $1/n$, άρα και του $\mathbb{Q}$:



Άρα όλοι οι ρητοί έχουν αντίστοιχο σημείο πάνω στην ευθεία. Αντίστροφα;

Από Ευκλείδεια Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με 1, έχει υποτείνουσα ίση με $\sqrt{2}$.



Το $υ=\sqrt{2}$ αντιστοιχεί σε σημείο της ευθείας, αλλά όχι σε αριθμό $\in \mathbb{Q}$:

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Αποδ. Έστω $0<q\in\mathbb{Q}$ με $q^2=2$. Τότε $\exists\, a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$: $q=\frac{a}{n}$, και $\frac{a}{n}=$ ανάγωγο. Τότε:

$$q^2=2 \Rightarrow \frac{a^2}{n^2}=2 \Rightarrow a^2=2n^2 \Rightarrow 2\,|\,a^2$$

Ισχυρισμός: $2|a^2 \Rightarrow 2|a$. Πράγματι, από ταυτότητα διαίρεσης: $a=2b+r$, $r=0$ ή 1. Για $r=1$ & $2|a \Rightarrow$ άτοπο. Για $r=0 \Rightarrow a=2b \Rightarrow q=\frac{2b}{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^2=2=\frac{4b^2}{n^2} \Rightarrow n^2=2b \Rightarrow \dots \Rightarrow 2|n \Rightarrow n=2m.$$

Άρα $q=\frac{a}{n}=\frac{2b}{2m}$, όχι ανάγωγο, άτοπο.

ΟΡΣ. Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται:

(i) <u>άνω φραγμένο</u> $\Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}: x \leq a, \forall x \in A$.

(ii) <u>κάτω φραγμένο</u> $\Leftrightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}: b \leq x, \forall x \in A$.

(iii) <u>φραγμένο</u> $\Leftrightarrow$ είναι άνω και κάτω φραγμένο.

<u>Παρατήρηση:</u> Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο από το $a \in \mathbb{R}$, τότε είναι άνω φραγμένο από κάθε $c \geq a$.

ΟΡΣ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι το a είναι <u>ελάχιστο άνω φράγμα</u> (supremum) του A $\Leftrightarrow$

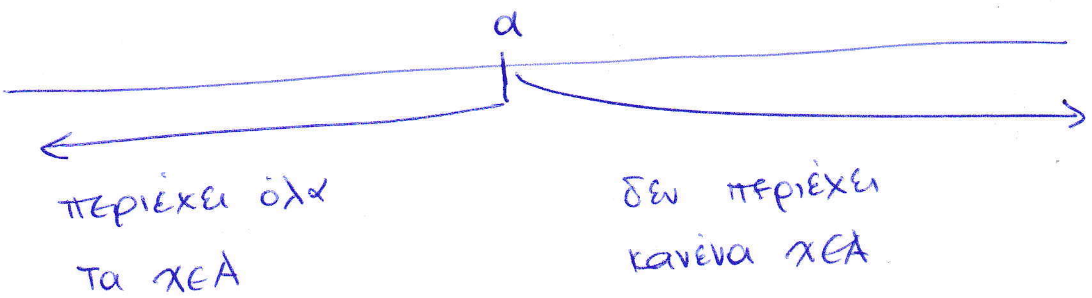
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ είναι άνω φράγμα του } A, \text{ και} \\ \forall \text{ άνω φράγμα } b \text{ του } A, \text{ είναι } a \leq b. \end{cases}$$

Αντίστοιχα, το a λέγεται <u>μέγιστο άνω φράγμα</u> (infimum) του A $\Leftrightarrow$

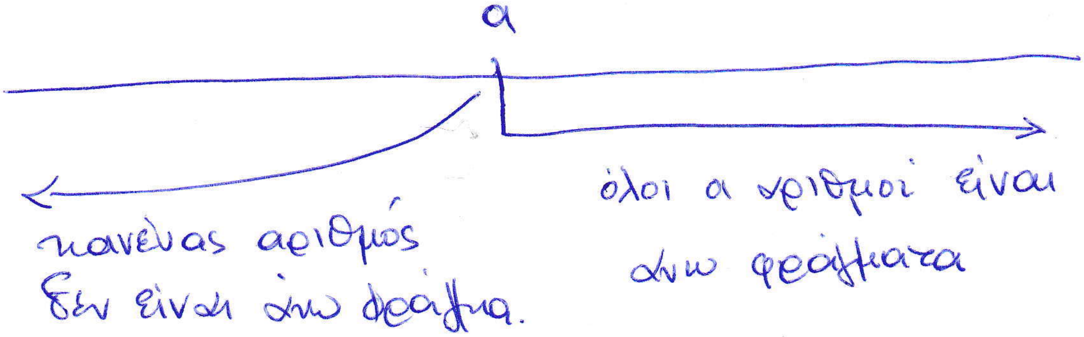
$$\begin{cases} a \text{ κάτω φράγμα του } A, \text{ και} \\ \forall \text{ κάτω φράγμα } b \text{ του } A \text{ είναι } b \leq a. \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\sup A = a \in \mathbb{R}$ τότε το a χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε δύο ημιάξονες:

$A \subseteq (-\infty, a]$ και $A \cap (a, +\infty) = \emptyset$



και συγχρόνως, $[a,+\infty)$ αποτελείται από άνω φράγματα του A, ενώ $(-\infty,a)$ δεν περιέχει κανένα άνω φράγμα του A.



ΕΡΩΤΗΣΗ:
Έχουν όλα τα φραγμένα $A\subseteq\mathbb{R}$ sup και inf?

→ Στο $\mathbb{Q}$ αυτό δεν συμβαίνει.

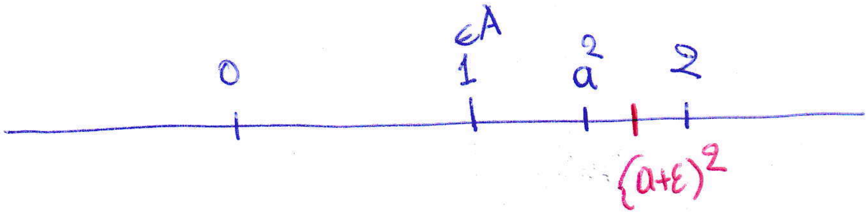
ΠΡΟΤΑΣΗ. $\exists\ \emptyset\neq A\subseteq\mathbb{Q}$ άνω φραγμένο που δεν έχει $\sup A\in\mathbb{Q}$.

Αποδ. Έστω

$$A=\{q\in\mathbb{Q}:\ q>0 \text{ και } q^2<2\}.$$

Τότε $1\in A \Rightarrow A\neq\emptyset$ και A άνω φραγμένο από το 2. Πράγματι: $\forall x\in A:\ x^2<2<4 \Rightarrow 0<x<2$. Ο.δ.ο. A δεν έχει $\sup A\in\mathbb{Q}$. Πράγματι, έστω ότι έχει $\sup A=a\in\mathbb{Q}$. Αφού $a\in\mathbb{Q} \Rightarrow a^2\neq 2 \Rightarrow a^2<2$ ή $a^2>2$.

(1) Έστω $a^2<2$. Ο.δ.ο. a όχι άνω φράγμα του A.



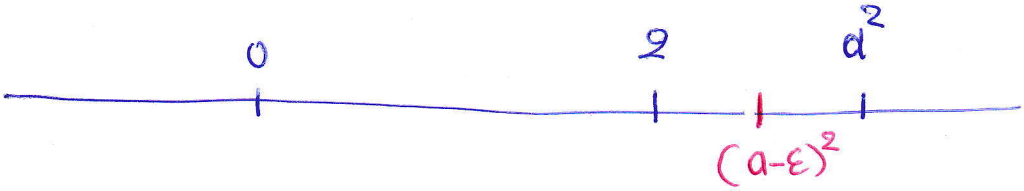
Θα βρούμε ρητό $0<\varepsilon<1$ με $(a+\varepsilon)^2<2$, οπότε: $a<a+\varepsilon$ και $a+\varepsilon \in A$, άτοπο. Για $\varepsilon<1$ είναι

$$(a+\varepsilon)^2 = a^2+2\varepsilon a+\varepsilon^2 < a^2+2a\varepsilon+\varepsilon = a^2+\varepsilon(2a+1) \overset{?}{<} 2 \iff$$

$$\iff \varepsilon < \frac{2-a^2}{2a+1} \in \mathbb{Q}^+$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{2-a^2}{2a+1}\right\} \in \mathbb{Q}^+$, έχουμε τον ζητούμενο ρητό $a+\varepsilon \in A$.

(2) Έστω $a^2>2$. Τώρα θδο υπάρχει και άλλο μικρότερο άνω φράγμα. Ζητάμε $0<\varepsilon<a$ με $(a-\varepsilon)^2>2$.



$$(a-\varepsilon)^2 = a^2-2a\varepsilon+\varepsilon^2 > a^2-2a\varepsilon \underset{;}{>} 2 \iff$$

$$\iff \frac{a^2-2}{2a} > \varepsilon$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{a, \frac{a^2-2}{2a}\right\}$ βρίσκουμε τον ζητούμενο ρητό $a-\varepsilon<a$ και είναι άνω φράγμα του A.