ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ

Έχοντας το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών μπορεί κανείς να κατασκευάσει το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τις τομές Dedekind, και να αποδείξει τις ιδιότητες του.

Εμείς θα δεχτούμε σαν αξίωμα την ύπαρξη του $\mathbb{R}$ και τις ιδιότητες του:

(1) Το $\mathbb{R}$ έχει μια πρόσθεση και ένα πολ/σμό, έτσι ώστε $(\mathbb{R},+,\cdot)$ να είναι σώμα

(2) Το $\mathbb{R}$ έχει μια ολική διάταξη $\leq$ συμβατή με τις πράξεις, άρα είναι ολικά διατεταγμένο σώμα

Δεχόμαστε ότι το $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την Αρχή της Πληρότητας: Κάθε $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο έχει $\sup A \in \mathbb{R}$, άρα

(3) Το $\mathbb{R}$ είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ Υπάρχει μοναδικός θετικός $x \in \mathbb{R}$: $x^2 = 2$.

Αποδ. Θεωρούμε $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \text{ και } x^2 < 2\}$.

$\emptyset \neq A$ άνω φραγμ $\Rightarrow \exists \sup A = \alpha \in \mathbb{R}$. Επαναλαμβάνοντας τις ανισότητες της αποδ. από σελ 17, βρίσκουμε $\alpha^2 > 2$ και $\alpha^2 < 2$ είναι άτοπα. Άρα $\alpha^2 = 2$.

Η ύπαρξη του $\sup A$, για κάθε $\emptyset \neq A$ άνω φραγμένο ισοδυναμεί με την ύπαρξη $\inf A$, για κάθε $\emptyset \neq A$ κάτω φραγμένο. Πράγματι

$\emptyset \neq A$ κάτω φραγμένο $\Longleftrightarrow \emptyset \neq (-A)$ άνω φραγμένο $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \exists \sup(-A) \in \mathbb{R}$

Επίσης δείχνουμε ότι $\sup(-A) = -\inf A$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$

Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο και $a \in A$. Τότε:

$$a = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} a \text{ άνω φράγμα του } A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : \ a - \varepsilon < x \leq a. \end{cases}$$

<u>Απόδ</u>

($\Rightarrow$) Έστω $a = \sup A$. Τότε είναι άνω φράγμα του A. Έστω και $\varepsilon > 0 \Rightarrow a - \varepsilon < a \Rightarrow a - \varepsilon$ <u>δεν</u> είναι άνω φράγμα του $A \Rightarrow \exists x \in A : \ a - \varepsilon < x \leq a$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι ισχύουν οι δύο ιδιότητες δεξιά. Θδο το a είναι το μικρότερο άνω φράγμα. Έστω άνω φράγμα $b < a \Rightarrow a - b = \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x \in A : \ a - \varepsilon = b < x \leq a$, άρα b όχι άνω φράγμα, άτοπο.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Έστω $a \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε <u>απόλυτη τιμή</u> του a τον $|a| \in \mathbb{R}$:

$$|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $\forall a \in \mathbb{R}: \ |a| \geq 0$

<u>Απόδ.</u> Αν $a \geq 0 \Rightarrow |a| \geq 0$

Αν $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $\forall a \in \mathbb{R}: \ a, -a \leq |a| = |-a|$.

<u>Απόδ.</u> (i) Έστω $a > 0$. Τότε $-a < 0$, άρα

$$|-a| = -(-a) = a = |a|$$

και $\quad -a < 0 < a = |a| \Rightarrow -a, a \leq |a|$.

(ii) Έστω $a = 0$. Τότε $-a = 0$, άρα

$$|-a| = 0 = |a|$$

και $\quad -a = a = 0 = |a| \Rightarrow -a, a \leq |a|$

(iii) Έστω $a < 0$. Τότε $-a > 0$, άρα

$$|-a| = \underbrace{-a}_{>0} = |a|$$

και

$$a < 0 < -a = |-a| = |a| \Rightarrow a, -a \leq |a|. \ ■$$

<u>Λήμμα</u> (i) $a > 0 \Rightarrow -a < 0$

(ii) $a > \beta \Rightarrow -a < -\beta$

<u>Απόδ.</u> (i) $a > 0 \Rightarrow a + (-a) > 0 + (-a) \Rightarrow 0 > -a$.

(ii) $a > \beta \Rightarrow a + (-a) + (-\beta) > \beta + (-a) + (-\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\beta > -a$ ■

ΠΡΟΤΑΣΗ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ με $\theta \geq 0$, ισχύει:
$$|\alpha| \leq \theta \iff -\theta \leq \alpha \leq \theta$$

Απόδ. ($\Rightarrow$) Έστω $|\alpha| \leq \theta \Rightarrow \alpha, -\alpha \leq \theta \Rightarrow$
$\Rightarrow -\theta \leq -\alpha$, $\alpha \leq \theta$.
($\Leftarrow$) Έστω $-\theta \leq \alpha \leq \theta$. Τότε:
Αν $\alpha \geq 0 \Rightarrow -\theta \leq 0 \leq \alpha = |\alpha| \leq \theta$.
Αν $\alpha < 0 \Rightarrow -\theta \leq \alpha < 0 \Rightarrow 0 < -\alpha = |\alpha| < -(-\theta) = \theta$. ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
(i) $|\alpha| \geq 0$
(ii) $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$
(iii) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
(iv) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Απόδ. (iv) Παρατηρούμε ότι $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:
ή $-|\alpha| \leq 0 \leq \alpha = |\alpha|$ (για $\alpha \geq 0$),
ή $-|\alpha| = \alpha < 0 < |\alpha|$ (για $\alpha < 0$).
Άρα πάντοτε:

$$\left.\begin{array}{ll} & -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \\ \text{Ομοίως} & -|b| \leq b \leq |b| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{-(|\alpha| + |\beta|)}_{-\theta} \leq \alpha + \beta \leq \underbrace{|\alpha| + |\beta|}_{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$, $0 \leq \alpha < \varepsilon$. Τότε
$$\alpha = 0.$$

Απόδ. Από τριχοτομία, έχουμε $a<0$ ή $a=0$ ή $a>0$.
Το $a<0$ δεν ισχύει, από υπόθεση.
Έστω $a>0$. Θέτω $\varepsilon = a/2$. Τότε:

$a>0 \Rightarrow a/2 = 2^{-1}\cdot a > 2^{-1}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$, και

$$a/2 + a/2 = a(1/2+1/2) = a(2^{-1}+2^{-1}) = a\cdot 2^{-1}(1+1) =$$
$$= a\cdot 2^{-1}\cdot 2 = a\cdot 1 = a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a - a/2 = a/2 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a > a/2 = \varepsilon > a,$$ άτοπο.

Άσκ 1 $\forall a,b\in\mathbb{R}:\ \big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$.

Απόδ. Αρκεί νδο $\underset{(1)}{-|a+b| \leq |a|-|b|} \underset{(2)}{\leq |a+b|}$.

Έχουμε:

$(1) \Leftrightarrow |b| \leq |a| + |a+b| = |-a| + |a+b|$

$= |(-a)+a+b|$

$(2) \Leftrightarrow |a| \leq |a+b| + |b| = |a+b| + |-b|$

$= |a+b+(-b)|$

Άσκ 2 Αν $-1<a<1$, τότε $\exists\, b\in\mathbb{R}:\ a=\dfrac{b}{1+|b|}$

Απόδ. (i) Αν $a=0$, ισχύει για $b=0$.
(ii) Αν $1>a>0 \Rightarrow 1-a>0$ και ισχύει για $b=\dfrac{a}{1-a}>0$ ($\because |b|=b$)

(iii) Αν $-1<a<0 \Rightarrow -1-a<0 \Rightarrow 1+a>0$ και ισχύει για $b=\dfrac{a}{1+a}<0$ ($\because |b|=-b$).

ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$. Θέτουμε:

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (για $a<b$)

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (για $a<b$)

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$[b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : b \leq x\}$

$(b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : b < x\}$.