ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ (Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$)
Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Απόδ. Έστω ότι $\emptyset \neq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο $\overset{A\Pi}{\Longrightarrow}$
$\exists \sup \mathbb{N} = a \in \mathbb{R}$.

$a-1 < a \Rightarrow a-1$ όχι άνω φρ. του $\mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : a-1 < n \leq a \Rightarrow$
$\Rightarrow a < \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow a$ όχι άνω φρ. του $\mathbb{N}$, άτοπο. ∎

Πόρισμα $\forall\, 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} : 1/n < \varepsilon$.

Απόδ. Έστω $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow 1/\varepsilon \in \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : 1/\varepsilon < n \Rightarrow 1/n < \varepsilon$. ∎

Πρόταση. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ άνω φραγμ. $\Rightarrow \sup A = a \in A$,
δηλ. κάθε άνω φραγμένο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ έχει μέγιστο.

Απόδ. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ άνω φραγμ. $\overset{A\Pi}{\Longrightarrow} \exists\, a = \sup A \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow a-1 < a \Rightarrow$ όχι άνω φρ. του $A \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, n_0 \in A : a-1 < n_0 \leq a \Rightarrow a < n_0+1 < n_0+2$
$\Rightarrow a < n_0+1 < n_0+2 < \dots \Rightarrow$
$\Rightarrow n_0+1, n_0+2, \dots \notin A \Rightarrow n_0 = \max A = a$. ∎

Άσκηση Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο. Να ελέγξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:
(i) $-A = \{-a : a \in A\}$ φραγμένο.
(ii) $\sup(-A) = -\inf A$.
(iii) $\inf(-A) = -\sup A$.

Πόρισμα $\forall\, 0<\theta\in\mathbb{R}$: $\theta\mathbb{N}=\{0,\theta,2\theta,3\theta,\dots,n\theta,\dots\}$ δεν είναι φραγμένο.

Απόδ. Αν a είναι άνω φράγμα του $\theta\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\theta n\le a$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $n\le a/\theta$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ φραγμ., αντίφαση. ∎

Πόρισμα $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $\exists!\, a\in\mathbb{Z}$: $a\le x<a+1$.
[Ο a λέγεται ακέραιο μέρος του x και συμβ. $[x]$]

Απόδ. $\mathbb{N}$ όχι άνω φρ. και $-\mathbb{N}$ όχι κάτω φρ. $\Rightarrow$
x δεν είναι άνω φρ. του $\mathbb{N}$ ούτε κάτω φρ. του $-\mathbb{N}$
$\Rightarrow \exists\, n_1, n_2\in\mathbb{N}$: $-n_2<x<n_1$

$A:=\{n\in\mathbb{N} : n-n_2>x\}\subseteq\mathbb{N}$

$n_1+n_2\in A\Rightarrow A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{N}\Rightarrow A$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το $n_0\in A$ ($\Rightarrow n_0-n_2>x$)

$\boxed{a:=n_0-n_2-1}$

n_0 ελάχιστο του $A\Rightarrow n_0-1\notin A\Rightarrow (n_0-1)-n_2\le x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(n_0-1)-n_2}_{a}\le x<\underbrace{n_0-n_2}_{a+1}$. ∎

Ερώτηση: $[3/2]=;$ $[-3/2]=;$

ΠΡΟΤΑΣΗ (πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς)
Αν $a,\beta\in\mathbb{R}$ με $a<\beta\Rightarrow\exists\,\gamma\in\mathbb{Q}$: $a<\gamma<\beta$.

Αποδ. $b-a>0$ και από Αρχιμήδεια ιδιότητα
$\exists\, n\in\mathbb{N}: \ b-a>\frac{1}{n}>0 \Rightarrow n(b-a)>1 \Rightarrow$
$\Rightarrow nb>1+na \Rightarrow$
$\Rightarrow nb>1+na \geq 1+[na]>na$
$\Rightarrow b>\underbrace{\frac{1+[na]}{n}}_{\in\mathbb{Q}}>a$ ■

Θεωρ. (πυκνότητα αρρήτων στους πραγματικούς)
$\forall\, a<b\in\mathbb{R} \quad \exists\, \delta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}: \ a<\delta<b.$

Αποδ $a<b \Rightarrow a-\sqrt{2}<b-\sqrt{2} \Rightarrow \exists\, q\in\mathbb{Q}:$
$a-\sqrt{2}<q<b-\sqrt{2} \Rightarrow$
$a<q+\sqrt{2}<b$

Το $q+\sqrt{2}$ είναι άρρητος:
$\left.\begin{array}{ll} q+\sqrt{2} & \text{ρητός} \\ -q & \text{-"-} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2}$ ρητός, άτοπο. ■

ΠΡΟΣΟΧΗ!
(1) $\forall\, n\in\mathbb{N}$ υπάρχει ο επόμενος φυσικός: $n+1$.
(2) $\forall\, a\in\mathbb{Z}$ υπάρχει ο επόμενος ακέραιος: $a+1$, και ο προηγούμενος ακέραιος: $a-1$
(3) Οι ρητοί, οι άρρητοι και οι πραγματικοί δεν έχουν ούτε προηγούμενο, ούτε επόμενο.

Έχουμε ήδη αποδείξει (βλ. Πρόταση, σελ. 18) ότι $\exists \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Ανάλογα, αποδεικνύεται και το

ΘΕΩΡΗΜΑ $\forall \rho \in \mathbb{R}$ με $\rho \geq 0$ και $\forall n \in \mathbb{N}$: $\exists!\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ με $\alpha^n = \rho$.

Συμβολίζουμε $\alpha = \rho^{1/n} = \sqrt[n]{\rho}$.

Απόδ. (1) $\rho = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \alpha = 1$.

(2) $\exists!\, \sqrt[n]{\rho},\ \forall \rho > 1 \Leftrightarrow \exists!\, \sqrt[n]{\rho},\ \forall\, 0 < \rho < 1$.

Πράγματι:

$$\sqrt[n]{\rho} = \alpha \Leftrightarrow \sqrt[n]{1/\rho} = 1/\sqrt[n]{\rho} = 1/\alpha.$$

(3) Έστω $\rho > 1$

$A := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x$ και $x^n < \rho\}$.

$$\left.\begin{aligned} &1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset \\ &\rho^n > \rho \Rightarrow \rho \text{ άνω φράγμα του } A. \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(\mathrm{A\Pi})}$$

$\Rightarrow \exists \sup A =: \alpha \in \mathbb{R}$: $1 \leq \alpha \leq \rho$. $\boxed{\text{Θδο } \alpha^n = \rho}$

(i) Έστω $\alpha^n < \rho$

Θδο $\exists\, m \in \mathbb{N}$ $\left(\alpha + \frac{1}{m}\right)^n < \rho \Rightarrow \alpha + \frac{1}{m} \in A$, άτοπο.

(Ανάλυση:)

$$\left(\alpha + \frac{1}{m}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \left(\frac{1}{m}\right)^k =$$

$$= \alpha^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \left(\frac{1}{m}\right)^k =$$

$$= \alpha^n + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \alpha^n + \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{nk} \overset{(*)}{\underset{;}{<}} \rho$$

Παρατηρούμε ότι για την τελευταία ανισότητα ⊛ ισχύει

$$⊛ \iff \frac{1}{m} < \frac{\rho - a^n}{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}}$$

(Σύνθεση:) $\exists\, m \in \mathbb{N} : m > \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}}{\rho - a^n} \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{m} < 1$,

και ικανοποιεί την $\left(a + \frac{1}{m}\right)^n < \rho$, άτοπο.

(ii) Έστω $a^n > \rho$

Θδο $\exists\, m \in \mathbb{N} : (a - 1/m)^n > \rho \Rightarrow a - 1/m$

$\Rightarrow a - 1/m$ είναι άνω φράγμα του A με

$a - 1/m < a = \sup A$, άτοπο.

(Ανάλυση:) $$\left(a - 1/m\right)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-1)^k (1/m)^k =$$

$$= a^n - \frac{1}{m}\left[\sum \binom{n}{k} a^{n-k} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}\right] \geq$$

$$\geq a^n - \frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}\right] \geq$$

$$\geq a^n - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \overset{⊛}{\underset{?}{>}} \rho$$

και $$⊛ \iff \frac{a^n - \rho}{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}} > \frac{1}{m} \iff m > \frac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}}{a^n - \rho} = M \in \mathbb{R}$$

(Σύνθεση:) Παίρνουμε $m \in \mathbb{N}$ με $m > M$ και έχουμε

το ζητούμενο ∎