ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

– Το x_0 λέγεται σημείο συσσώρευσης του A, αν
$\forall \delta > 0 \ \exists x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \iff$
$\forall \delta > 0 \ \exists x \in A : x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

– Το x_0 λέγεται σ.σ. του A από αριστερά, αν
$\forall \delta > 0 \ \exists x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)$

– Το x_0 λέγεται σ.σ. του A από δεξιά, αν
$\forall \delta > 0 \ \exists x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ (επέκταση του προηγ. ορσ. για $\pm\infty$) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

Το $+\infty$ είναι σ.σ του $A \iff$
$\iff \forall M > 0 \ \exists x \in A : x > M \iff A$ όχι άνω φρ.

Το $-\infty$ είναι σ.σ. του $A \iff$
$\iff \forall M > 0 \ \exists x \in A : x < -M \iff A$ όχι κάτω φρ.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ λέγεται μεμονωμένο σημείο
$\iff x_0$ όχι σ.σ. του A
$\iff \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \neq x_0 : |x - x_0| \geq \delta$
$\iff \exists \delta > 0 : A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$

Π.Χ (1) $A = [0, 1]$: κάθε $x \in A$ είναι σ.σ.
κάθε $x \notin A$ δεν είναι σ.σ.
$\nexists$ μεμον. σημεία.

(2) $A=[0,1]\cup\{2\}$ κάθε $x\in[0,1]$ είναι σ.σ.

κάθε $x\notin[0,1]$ δεν είναι σ.σ.

το 2 είναι μεμ. σημείο.

(3) $A=(0,1)$ κάθε $x\in[0,1]$ είναι σ.σ

κάθε $x\notin[0,1]$ δεν είναι σ.σ.

∄ μεμονωμένα

(4) $A=\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ ∄ σ.σ. $\in\mathbb{R}$, που είναι σ.σ.

κάθε $n\in\mathbb{N}$ είναι μεμον. σημείο.

(5) $A=\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$ 0 είναι σ.σ.

κάθε $1/n\in A$ είναι μεμ. σ.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Είναι ισοδύναμα:

(i) x_0 σ.σ. του A

(ii) $\forall\,\delta>0$ $A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ = απειροσύνολο

(iii) ∃ ακολουθία (x_n) στο A, με όρους ανά δύο διαφορετικούς και διαφ. από x_0, με $x_n\to x_0$.

Αποδ. (i) ⇒ (ii) Με άτοπο: Έστω x_0 σ.σ. και ∃ $\delta>0$: $A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ = πεπερ = $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\cup\{x_0\}$

(Αφαιρώ το x_0), πάλι πεπερ. είναι, έστω το $\{x_1,\dots,x_n\}$.

∃ $\delta_0=\min\{|x_0-x_1|,|x_0-x_2|,\dots,|x_0-x_n|\}$ ⇒

⇒ $A\cap(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subseteq\{x_0\}$, άτοπο.

(ii) ⇒ (iii) $\delta_1=1$ ⇒ $A\cap(x_0-1,x_0+1)$ άπειρο ⇒

⇒ ∃ $x_1\in A$, με $x_1\neq x_0$: $|x_1-x_0|<1$.

$\delta_2:=\min\{1/2,|x_1-x_0|\}$ ⇒ $A\cap(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$ άπειρο ⇒

⇒ ∃ $x_2\in A$ με $x_2\neq x_0$ και $x_2\neq x_1$: $|x_2-x_0|<\delta_2\leq 1/2$

Επαγωγικά:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \delta_n := \min\{1/n, |x_{n-1} - x_0|\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n)$ άπειρο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x_n \in A$ με $x_n \neq x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ και

$0 \leq |x_n - x_0| < \delta_n \leq 1/n$

$\Downarrow$

$\exists (x_n): x_n \in A, \quad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j, \ i,j \in \mathbb{N}_0$ και

(ισοσυγκλίνουσες) $|x_n - x_0| \to 0 \Rightarrow x_n \to x_0$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $\delta > 0$. Θδο $\exists\, x \in A: 0 < |x - x_0| < \delta$.

Παίρνω την (x_n) του (iii), για το $\delta > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq n_0 \quad |x_n - x_0| < \delta$

$x_n \neq x_0 \Rightarrow 0 < |x_n - x_0|$

$\Big\} \Rightarrow$ το ζητούμενο ισχύει για κάθε $x = x_n \in A$ με $n \geq n_0$. ∎

$\boxed{\text{Παρατήρηση.}}$ Αν x_0 σ.σ. του A από αριστερά, $(x_n)\uparrow$

— " — δεξιά, $(x_n)\downarrow$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ (1) $+\infty$ είναι σ.σ. του A $\Leftrightarrow$

$\exists\, (x_n)\uparrow : x_n \in A$ με $x_n \to +\infty$

(2) $-\infty$ είναι σ.σ. του A $\Leftrightarrow$

$\exists\, (x_n)\downarrow : x_n \in A$ με $x_n \to -\infty$.

Απόδ: Άσκηση.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΣ (1) $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A. Λέμε ότι υπάρχει το όριο της f καθώς x τείνει στο x_0 και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ $\overset{}{\underset{\text{συμβ}}{\Longleftrightarrow}}$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Διαφορές συνέχειας – ορίου στο x_0:

Συνέχεια:	Όρια:
(1) $x_0 \in A$	(1) x_0 σ.σ. του A. ($x_0 \overset{?}{\in} A$)
(2) $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ δίνει συνέχεια στα μεμον. σημεία	(2) $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta \Downarrow x \neq x_0$ όριο δεν εξετάζεται στα μεμ. σημεία
(3) $\ell = f(x_0)$	(3) Μπορεί $f(x) \neq \ell \ \forall x \in A$

ΟΡΣ (2) $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A από αριστερά. Λέμε ότι υπάρχει το όριο της f καθώς x τείνει στο x_0 από αριστερά και ισούται με $\ell \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) : |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ανάλογα από δεξιά

ΟΡΙΣ (3) $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A ($x_0 \in \mathbb{R}$). Λέμε ότι η f τείνει στο $+\infty$, καθώς x τείνει στο x_0 $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta : f(x) > M$.

Ανάλογα, f τείνει στο $-\infty$, καθώς x τείνει στο x_0

—//—, f τείνει στο $\pm\infty$, καθώς x τείνει στο x_0 από αριστερά / από δεξιά

ΠΡΟΤΑΣΗ $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A και από αριστερά, και από δεξιά. Τότε

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ και

($\ell \in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty$) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

ΟΡΙΣ (4) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $+\infty$ σ.σ. του A. Λέμε ότι

(i) υπάρχει το όριο της f καθώς x τείνει στο $+\infty$ και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A$ με $x > M : |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

(ii) f τείνει στο $+\infty$ καθώς x τείνει στο $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A$ με $x > M : f(x) > \varepsilon$.

(iii) f τείνει στο $-\infty$ καθώς x τείνει στο $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A$ με $x > M : f(x) < -\varepsilon$.

Ανάλογα για $x \to -\infty$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ (Αρχή της μεταφοράς για το όριο)

$f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σ.σ. του A.

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ($\in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty$) $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\forall$ ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ είναι $f(x_n) \to \ell$.

Απόδ (1) Για $\ell \in \mathbb{R}$:

($\Rightarrow$) Έστω $x_n \to x_0$ ($x_n \in A$) και $\varepsilon > 0$.

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, άρα για το $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$:

$$\underset{x \in A}{0 < |x - x_0| < \delta} \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Για το $\delta > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$: $0 < |x_n - x_0| < \delta$

$$\Downarrow (*)$$

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Με άτοπο:

Έστω ότι $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ $\exists\, x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$.

παίρνοντας διαδοχικά $\delta := 1/n$ $\rightsquigarrow$ $x_n \in A$ $x_n \neq x_0$ με $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ και $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$A \ni x_n \to x_0$ $\qquad$ $f(x_n) \not\to \ell$ άτοπο

(2) Για $\ell = \pm\infty$, ανάλογα. ∎

Βασικά παραδείγματα

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ $\quad$ (π.ο: $\mathbb{R}_*$, ο σ.σ του $\mathbb{R}_*$).

Απόδ

Έστω $x_n \to 0$ με $x_n \neq 0 \Rightarrow x_n \in (-\pi/2, \pi/2)$ τελικά.

$$\Rightarrow \frac{\eta\mu x_n}{x_n} > 0.$$

$|\eta\mu x_n| \leq |x_n| \leq |\tan x_n| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\eta\mu x_n}{x_n} < 1 \\ |\cos x_n| < \frac{\eta\mu x_n}{x_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{|\cos x_n|}_{\downarrow\ \cos 0 = 1} < \frac{\eta\mu x_n}{x_n} < \underbrace{1}_{\downarrow\ 1}.$$

(2) Τα όρια $\lim_{x\to 0}\eta\mu\frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ δεν υπάρχουν.

$x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$ και $\eta\mu\frac{1}{x_n} = \eta\mu(2\pi n) = 0 \to 0$.

$$\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x_n} = \sigma\upsilon\nu(2\pi n) = 1 \to 1.$$

$y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \to 0$ και $\eta\mu\frac{1}{y_n} = \eta\mu(2\pi n + \pi/2) = 1 \to 1$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{1}{y_n} = \sigma\upsilon\nu(2\pi n + \pi/2) = 0 \to 0. \ \blacksquare$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $f, g: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σ.σ. του A.
Υποθέτουμε ότι $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$.
Τότε:

(1) $\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = m+\ell$

(2) $\exists \lim_{x \to x_0} (fg)(x) = m \cdot \ell$

(3) Αν $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ και $m \neq 0 \Rightarrow$
$\exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \ell/m$

Απόδ. Με αρχή της μεταφοράς.

ΠΡΟΤΑΣΗ: $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
$f(A) \subseteq B$, $\ell \in B$
$g: B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο ℓ $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\ell)$.

Απόδ. Με αρχή της μεταφοράς:
Έστω (x_n):

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in A \\ x_n \neq x_0 \\ x_n \to x_0 \end{array}\right\} \xRightarrow[f]{\text{ΑΜΟ}} \underset{B}{\underset{\cap}{f(x_n)}} \to \underset{B}{\underset{\cap}{\ell}} \xRightarrow[g]{\text{ΑΜΣ}} g(f(x_n)) \to g(\ell).$$

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και x_0 σ.σ. του A. Τότε:

f συνεχής στο $x_0 \iff \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Απόδ. ($\Rightarrow$) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$:

$x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ιδιαιτέρως:

$x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Δηλ. ισχύει ο ορσ. του ορίου για $\ell = f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε:

$\exists\, \delta > 0 : \underset{x \in A}{0 < |x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - \overset{\ell}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}}| < \varepsilon$.

Για $x = x_0 \in A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. ∎

Υπενθ: κάθε f είναι συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του π.ο. της.

ΕΙΔΗ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ: Εστω f ασυνεχής στο $x_0 \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0$ σ.σ. του A.

(1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, αλλά $\neq f(x_0)$.

Η ασυνέχεια αίρεται

(2) $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$:

(2α) $\exists$ πλευρικά όρια $\in \mathbb{R}$ αλλά διαφέρουν μεταξύ τους:
ασυνέχεια α' είδους / άλμα

(2β) $\nexists$ κάποιο πλευρικό όριο:
ασυνέχεια β' είδους / ουσιαστική ασυνέχεια.

ΠΡΟΤΑΣΗ (ασυνέχεια μονότονων)

I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ μονότονη $\Rightarrow$ πλευρικά όρια υπάρχουν σε κάθε $x_0 \in I$.

Άρα: αν f ασυνεχής $\Rightarrow$ παρουσιάζει άλμα.

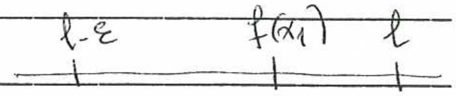
Απόδ. Έστω f ↑ και έστω $x_0 \in I$. Ψάχνω για $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
(x_0 σ.σ. από αριστερά)

Θέτω

$A := \{f(x) : I \ni x < x_0\} \neq \emptyset$ και άνω φρ. από $f(x_0)$.

$\Rightarrow \exists\ l := \sup A \le f(x_0)$.

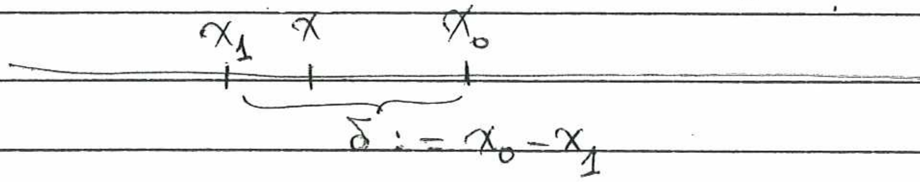
ΘΔο $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.



Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow l - \varepsilon$ όχι άνω φρ. του $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ f(x_1) \in A: \ l - \varepsilon < f(x_1) \le l$.

δηλ. $\exists\ x_1 \in I: \ \underset{\Uparrow \atop f(x_1) \in A}{x_1 < x_0}$, & $l - \varepsilon < f(x_1) \le l \le f(x_0)$



κάθε $x \in (x_1, x_0) \Rightarrow x \in I$ γιατί I διάστημα

$\forall x \in I: \ \underbrace{x_0 - \delta}_{= x_1} < x < x_0 \Rightarrow f(x_1) \le f(x) \le l \le f(x_0) \Rightarrow$

$$\underbrace{l - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le l}_{} \le f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Παρόμοια δείχνουμε ότι $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Άρα ασυνεχής $\Rightarrow$ άλμα ∎

Παρατηρήσεις: $\forall a>0$:

(i) $a = \underbrace{\exp(\ln a)}_{=id} = e^{\ln a}$

(ii) $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$

(iii) $a \neq 1$: $\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{y \cdot \ln a} = e^{\ln x}$

$\Leftrightarrow y \ln a = \ln x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ $f : I \xrightarrow{} \mathbb{R}$ συνεχής & 1-1 $\Rightarrow$ f γν. μονότονη.

διάστημα

Αποδ. Έστω $a<b \in I$ και $f(a)<f(b)$. Θ.δ.ο. $f \uparrow$

[αν $f(a)>f(b)$ δείχνουμε ότι $f \downarrow$].

① Έστω $c \in I : c<a$ Θ.δ.ο. $f(c)<f(a)$.

Με άτοπο: - αν $f(a)<f(c)<f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in (a,b) : f(x)=f(c)$, άτοπο

- αν $f(a)<f(b)<f(c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, y \in (c,a) : f(y)=f(b)$, άτοπο.

Ανάλογα, αν $a<c<b \Rightarrow f(a)<f(c)<f(b)$ και

αν $a<b<c \Rightarrow f(a)<f(b)<f(c)$.

② Έστω $x<y \in I$ Θ.δ.ο. $f(x)<f(y)$

Θέση των x,y ως προς a,b:

$x<y<a<b$ (i)

$x<a<y<b$ (ii)

$x<a<b<y$ (iii)

$a<x<y<b$ (iv)

$a<x<b<y$ (v)

$a<b<x<y$ (vi).

(i) παίρνω $x=c \Rightarrow f(x)<f(a)$,

οπότε χρησιμοποιώντας τα x & $a \Rightarrow f(x)<f(y)<f(a)$.

(ii) $x=c \Rightarrow f(x)<f(a)$

ενώ $y=c \Rightarrow f(a)<f(y)<f(b)$ $\Big\} \Rightarrow f(x)<f(y)$.

Ανάλογα τα άλλα. ∎

Άρα $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής & 1-1 $\Rightarrow$ γν. μονότονη, έστω $\uparrow$

$\Rightarrow \underbrace{f([a,b])} = [f(a), f(b)]$

εικόνα διαστήματος μέσω συνεχούς = διάστημα.

$\exists\, f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$. (6.26)

παρόμοια για ανοιχτά ή ημι-ανοιχτά.

Υπενθ: $\boxed{f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y}$

Λήμμα: $f\uparrow \iff f^{-1}\uparrow$ (αντίσ. $f\downarrow \iff f^{-1}\downarrow$).

($\Rightarrow$) $y_1 < y_2$ και $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

$x_1 = x_2$ αποκλείεται, γιατί f συνάρτηση.

$x_2 < x_1$ —"— γιατί $f(x_2) \not< f(x_1)$.

($\Leftarrow$) παρόμοια. ∎

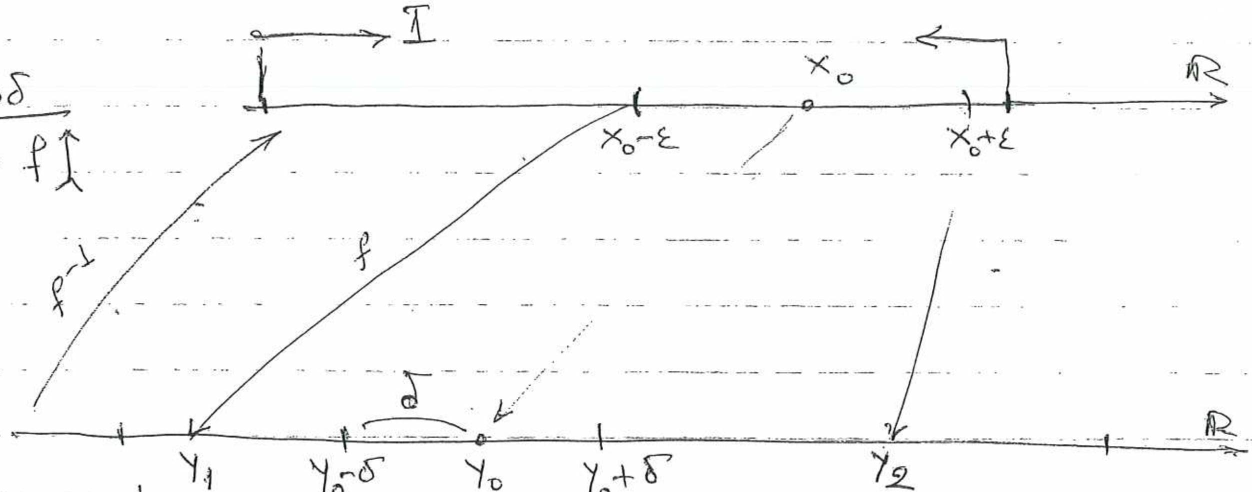
ΘΕΩΡ (Αντίστροφη συνεχούς)

I διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ 1-1, συνεχής $\Rightarrow$

$f^{-1} : f(I) \to I$ συνεχής.

Απόδ

Έστω $f\uparrow$



→ εσωτερικό

$y_0 \in f(I) \Rightarrow \exists!\, x_0 \in I : f(x_0) = y_0$.

ΘΔο f^{-1} συνεχής στο y_0.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μικραίνω ώστε $x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon \in I$

$f(x_0 - \varepsilon) = y_1 < y_0 < y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$

$y_2 - y_0,\ y_0 - y_1 > 0 \Rightarrow \exists\, \delta < \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$

$\forall\, y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \Rightarrow y \in (y_1, y_2) \Rightarrow \exists!\, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$: $f(x) = y$.

$f^{-1}(y) = x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

Λογαριθμική συνάρτηση

Έστω $a>1$. Γνωρίζουμε την εκθετική συνάρτηση:

$$f_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty) : x \mapsto a^x$$

που είναι $\uparrow$, συνεχής, (άρα 1-1). Είναι επί:

Έστω $y \in (0,+\infty)$.

$a^n \to +\infty$, $a^{-n} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ για $\varepsilon = y > 0$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : a^{n_1} > y$

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : a^{-n_2} < y$.

$n_0 := \max(n_1, n_2) \Rightarrow a^{-n_0} < y < a^{n_0}$

$\Rightarrow$ Θεωρ. ενδιάμ. τιμής στο $[-n_0, n_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in (-n_0, n_0) : a^x = y$

1-1, επί $\Rightarrow \exists\, f_a^{-1} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f \uparrow \Rightarrow f_a^{-1} \uparrow$

f συνεχής $\Rightarrow f_a^{-1}$ συνεχής.

$\boxed{\text{Συμβ: } f_a^{-1} =: \log_a}$

Ομοίως για $0<a<1$ $f_a \downarrow$ (1-1), συνεχής επί του $(0,+\infty)$

$\Rightarrow \exists\, f_a^{-1} = \log_a$

Γράφουμε | **exp** για την --- f_e και
| **ln** για την $\log_e$.

Παρατ: $\forall a > 0$ (1) $a = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$

(i) $a = \underbrace{\exp(\ln}_{id} a) = e^{\ln a}$

(ii) $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$

(iii) $a \neq 1 \Rightarrow \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

πίσω $\rightarrow$

Παρατ. $a \neq 1,\ x, y > 0 \Rightarrow$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Πράγματι: $\log_a(xy) = z \Rightarrow xy = a^z \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^{\log_a(x)}\, a^{\log_a(y)} = a^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

(i) $0 < a < 1 \Rightarrow a^x \downarrow$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0.$

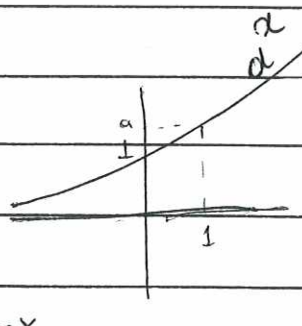
(ii) $1 < a \Rightarrow a^x \uparrow$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0.$

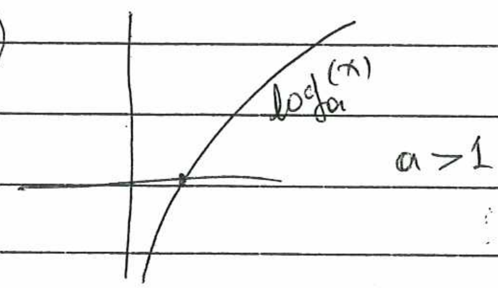
(iii) $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a \downarrow$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$,

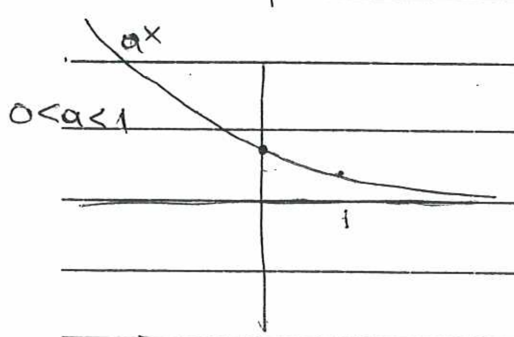
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

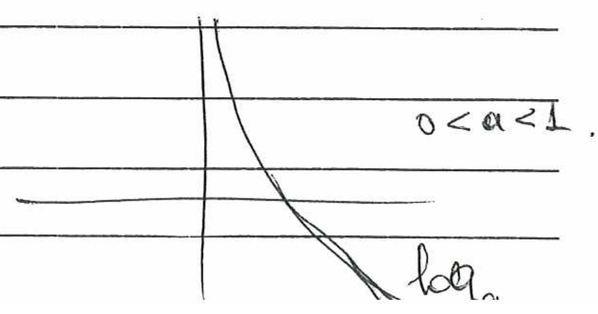
(iv) $1 < a \Rightarrow \log_a \uparrow$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$









Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών.

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Θέτουμε:

(1) $-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

(2) $a + (+\infty) = (+\infty) + a = a - (-\infty) = +\infty.$

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = a - (+\infty) = -\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

(3) $a \cdot (+\infty) = +\infty = +\infty \cdot a$

$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty \quad \forall a > 0.$

(4) $a(+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$

$a(-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty \quad \forall a < 0.$

(5) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$

$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty.$

ΔΕΝ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ.

$(+\infty) + (-\infty)$ ή $(-\infty) + (+\infty)$

$0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$

$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Οι πράξεις ερμηνεύονται από όρια ακολουθιών/συναρτήσεων.

Εφαρμογές των Βασικών Θεωρημάτων

ΘΕΩΡ 1 $n \geq 2$, $\rho > 0 \Rightarrow \exists ! \, \xi > 0 : \xi^n = \rho$.

Απόδ. Θεωρούμε $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = x^n$: συνεχής.

(i) $0 < \rho < 1 \Rightarrow f(1) = 1^n > \rho$.
(ii) $\rho > 1 \Rightarrow f(\rho) = \rho^n > \rho$.
(iii) $\rho = 1 \Rightarrow f(2) = 2^n > 1 = \rho$.

$\Rightarrow \exists b > 0 : f(b) > \rho$.

Επίσης $f(0) = 0^n = 0 < \rho$.

Από Θ. Ενδ. Τιμής $\exists \, \xi \in (0, b) : f(\xi) = \rho$.

Μονοσήμαντο από $f \uparrow$

$f = f_a$, $a = n$.

■

ΘΕΩΡ 2 Κάθε πολ/μο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Απόδ. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$

$a_n \neq 0$ έστω > 0

$$= a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right]$$

$\forall x_k \to +\infty$: $P(x_k) = a_n x_k^n [\dots] \to$

$\to a_n (+\infty) \cdot [1 + 0 + 0 \dots + 0] = a_n(+\infty) = +\infty$

$\forall x_k \to -\infty$ $P(x_k) \to a_n(-\infty) = -\infty$.

Άρα $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \underbrace{a_n(+\infty)}_{+\infty}$, $\exists \lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \underbrace{a_n(-\infty)}_{-\infty}$

$\forall M > 0 : \exists \, \varepsilon > 0 :$ $x > \varepsilon \Rightarrow P(x) > M$.

$x < -\varepsilon \Rightarrow P(x) < -M$.

$\Rightarrow \underset{>0}{f(\varepsilon + 1)} \cdot \underset{<0}{f(-\varepsilon - 1)} < 0 \Rightarrow \exists$ ρίζα $\in (-\varepsilon - 1, \varepsilon + 1)$. ■

Θεωρ. (σταθερού σημείου).

$f: [0,1] \to [0,1]$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, x_0 \in [0,1]: f(x_0) = x_0$

Απόδ. $g(x) = f(x) - x$. Το x_0 είναι ρίζα της g.

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{array}\right\}$$

Αν μία από τις παραπάνω είναι ισότητα $\Rightarrow$ βρήκα τη ρίζ

Αν καμμία δεν είναι ισότητα $\Rightarrow$ Bolzano. ∎