ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΣΥΓΚΛΙΣΗ

ΟΡΣ 1 Ακολουθία λέγεται κάθε συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Κάθε ακολουθία α ορίζει (και ορίζεται από) το διατεταγμένο άπειρο σύνολο
$$(a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots).$$
Γράφουμε $a_n := a(n)$ και συμβολίζουμε την ακολουθία α με $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Παραδ. (1) Έστω $c\in\mathbb{R}$ και $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ η σταθερή συνάρτηση με $\alpha(n) = \alpha_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλ.
$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (c, c, c, c, \ldots).$$
Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται σταθερή ακολουθία

(2) Η ακολουθία των φυσικών : $\alpha_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$$
(3)

(3) Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots).$$

(4) Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = (-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$:
$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots).$$

(5) Έστω $a \in \mathbb{R}$, και $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$: $\alpha_n = a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$(a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots)$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 2}}$ Δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγονται <u>ίσες</u> $\iff$ α και β είναι ίσες συναρτήσεις: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\iff$ $\alpha_n = \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 3}}$ <u>Τελικό τμήμα</u> μιας ακολουθίας (a_n) είναι κάθε ακολουθία (β_n) της μορφής

$$\beta_n = a_{n+n_0}$$

για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Δηλ.

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots) = (a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, \ldots).$$

Ισοδύναμα: η $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι η σύνθεση

$$\beta = \alpha \circ \varphi_{n_0}$$

όπου

$$\varphi_{n_0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \varphi_{n_0}(n) := n_0 + n.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\varphi_{n_0}"] \arrow[dr, "\beta"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 4}}$ Έστω (a_n), (β_n) ακολουθίες. Τότε: ορίζουμε:
<u>άθροισμα</u> των $(a_n), (\beta_n)$: την $(a_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
<u>γινόμενο</u> των $(\alpha_n), (\beta_n)$: την $(\alpha_n \cdot \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
<u>γινόμενο της (a_n) με $\lambda \in \mathbb{R}$</u>: $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
<u>διαφορά των $(a_n), (\beta_n)$</u>: $(a_n - \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
αν $\beta_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
<u>πηλίκο</u>: $(a_n/\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 5}}$ Μια ακολουθία (a_n) λέγεται:

- αύξουσα, αν $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (συμβ: $(a_n)\uparrow$)
- γνησίως αύξουσα, αν $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (συμβ: $(a_n)\uparrow$).
- φθίνουσα, αν $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (συμβ: $(a_n)\downarrow$)
- γνησίως φθίνουσα, αν $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (συμβ: $(a_n)\downarrow$)
- μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα
- γνησίως μονότονη αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 6}}$ Μια ακολουθία (a_n) λέγεται:

- άνω φραγμένη, αν το σύνολο των εικόνων της $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο, δηλ. αν $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- κάτω φραγμένη, αν το σύνολο των εικόνων της είναι κάτω φραγμένο, δηλ. αν $\exists N \in \mathbb{R} : a_n \geq N$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- φραγμένη, αν είναι άνω και κάτω φραγμένη. $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists A > 0 : |a_n| < A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 7}}$ Μια ακολουθία λέγεται αναδρομική αν ορίζεται αναδρομικά, δηλ. αν δίνεται από

(i) το $a_1 \in \mathbb{R}$, και

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = f(a_n)$, για κάποια συνάρτηση f.

πχ: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{3}$, $n \in \mathbb{N}$

Υπολογίζοντας διαδοχικά τα $a_2, a_3, \ldots$ βρίσκουμε $(2, 1, 2/3, 5/9, 14/27, \ldots)$

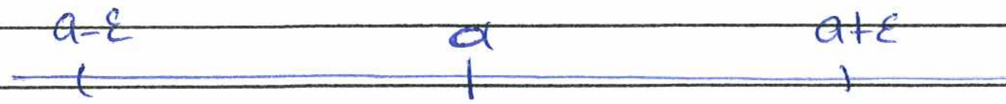
ΣΥΓΚΛΙΣΗ

ΟΡΣ. Λέμε ότι μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $a\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ |a_n-a|<\varepsilon.$$

Γράφουμε $a_n\to a$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ή $\lim a_n = a$.

Σύμφωνα με τον ορισμό, $a_n\to a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists$ τελικό τμήμα $(a_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$ της (a_n): κάθε όρος του τελικού τμήματος να έχει απόσταση από το a μικρότερη του ε.



$\forall\ \varepsilon>0$, μετά από κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$ (που αλλάζει με το ε), όλοι οι όροι της (a_n) βρίσκονται μέσα στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

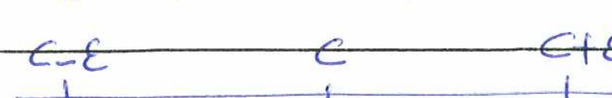
Έξω από το διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ βρίσκονται το πολύ οι όροι $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$

Παραδείγματα

(1) Η σταθερή ακολουθία $(a_n=c)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $c\in\mathbb{R}$:

$$a_n = c \to c$$

Πράγματι: έστω $\varepsilon>0$. Παίρνουμε $n_0=1\in\mathbb{N}$. Τότε $\forall\ n\geq 1$: $|a_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon$.

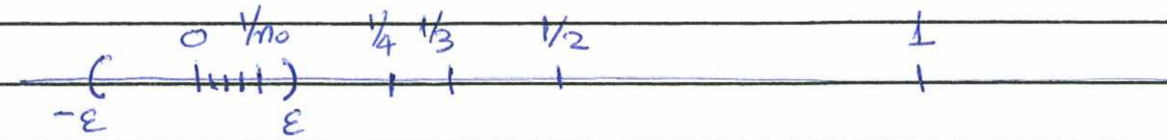


(2) $a_n = 1/n \longrightarrow 0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \ 1/n_0 < \varepsilon$. Επίσης, $\forall\, n \geq n_0 : 1/n \leq 1/n_0$.

Άρα:

$\forall\, n \geq n_0 : \ |a_n - 0| = |1/n - 0| = 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon.$



(3) Η (a_n) με $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει σε κανένα $a \in \mathbb{R}$.

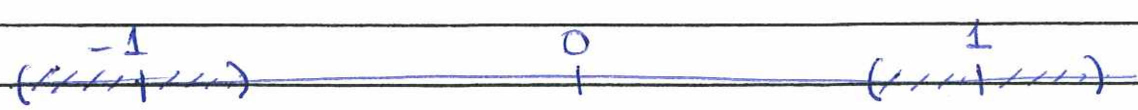
Παρατηρούμε ότι $\forall\, n \in \mathbb{N} : \ |a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| =$
$= |(-1)^n (1 - (-1))| = |(-1)^n| \cdot |1+1| = 2.$

Έστω ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Θεωρώ το $\varepsilon = 1/2 > 0$.
Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq n_0 \ |a_n - a| < 1/2$.

Οπότε, $\forall\, n \geq n_0$:

$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq$

$\leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1/2 + 1/2 = 1$, άτοπο.



Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι $\forall\, \varepsilon > 0$, υπάρχουν άπειροι όροι μέσα στο $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \ni a_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, και άπειροι όροι μέσα στο $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \ni a_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Μοναδικότητα του ορίου)

$a_n \to a$ και $a_n \to b \Rightarrow a = b.$

Αποδ. Α.

Εστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το $\varepsilon/2 > 0$.

$a_n \to a \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon/2$.

$a_n \to b \Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_2 \quad |a_n - b| < \varepsilon/2$

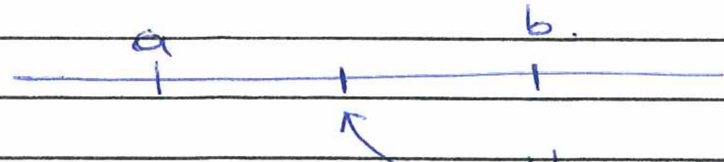
Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, $\forall\, n \geq n_0$:

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a-b| = 0 \Rightarrow a = b.$$

Αποδ Β

Εστω $a < b$.



$\frac{a+b}{2} = a + \varepsilon = b - \varepsilon.$

Θέτουμε $\varepsilon := \frac{a+b}{2} > 0 \Rightarrow a + \varepsilon = b - \varepsilon.$

Για αυτό το $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ όπως προηγουμένως, οπότε, $\forall\, n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon < \underbrace{a_n < a + \varepsilon}$$

και

$$|a_n - b| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - b < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{b - \varepsilon < a_n} < b + \varepsilon,$$

άτοπο.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ.}}$ (Κριτήριο παρεμβολής / ισοσυγκλινουσών).
Εστω οι ακολουθίες (a_n), (β_n), (γ_n) με $a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, και $a_n \to x$, $\gamma_n \to x$. Τότε $\beta_n \to x$.

<u>Απόδ.</u> Έστω $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to x \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \ x-\varepsilon < a_n < x+\varepsilon, \quad \forall n \geq n_1 \\ \gamma_n \to x \Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \ x-\varepsilon < \gamma_n < x+\varepsilon, \quad \forall n \geq n_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$:

$$x-\varepsilon < a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n < x+\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0$:

$$|\beta_n - x| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \beta_n \to x$. ∎

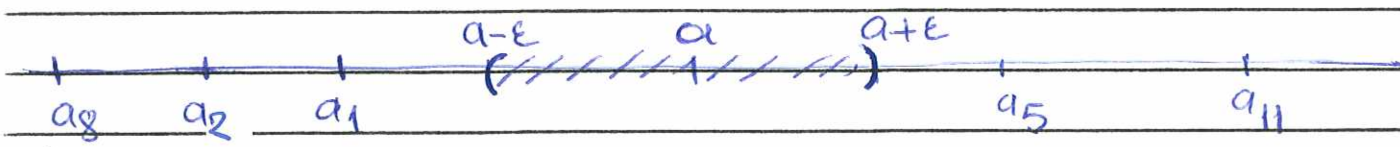
Υπενθυμίζουμε ότι:

(a_n) <u>φραγμένη</u> $\Leftrightarrow$ Το σύνολο των εικόνων της $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, M > 0 : |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, M > 0 : -M \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R} : \ m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ.}}$ $a_n \to a \Rightarrow (a_n)$ φραγμένη.

<u>Απόδ</u> Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$



Θέτουμε $M := \max\{a_1, \dots, a_{n_0-1}, a+\varepsilon\}$.
$m := \min\{a_1, \dots, a_{n_0-1}, a-\varepsilon\}$. Τότε:

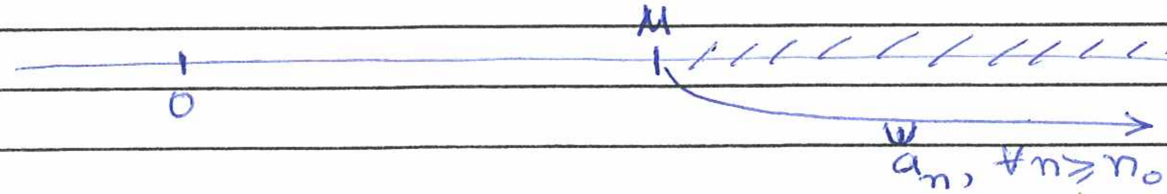
$n < n_0 \Rightarrow m \leq a_n \leq M$

$n \geq n_0 \Rightarrow m \leq a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \leq M$

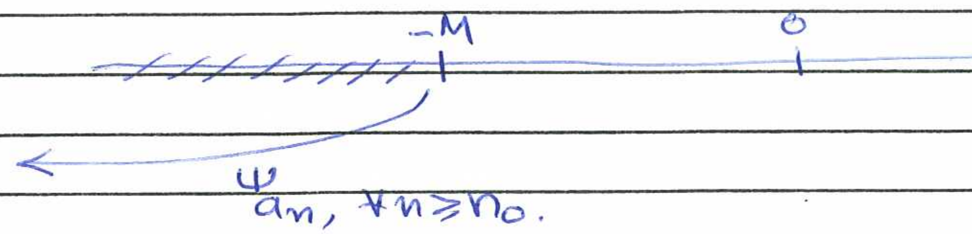
Άρα $m \leq a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$. ∎

Προσοχή! συγκλίνουσα $\Rightarrow$ φραγμένη.
φραγμένη $\not\Rightarrow$ συγκλίνουσα.
π.χ.: $a_n=(-1)^n$.

ΟΡΣ Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε $a_n \to +\infty \iff$
$\iff \forall M>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M, \ \forall n \geq n_0$



Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε $a_n \to -\infty$
$\iff \forall M>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < -M, \ \forall n \geq n_0$.



Παρατ: Χρησιμοποιούμε τον όρο "η ακολουθία συγκλίνει" μόνο για $a_n \to a \in \mathbb{R}$ (: συγκλίνουσες ακολουθίες). Αν μια ακολουθία δεν συγκλίνει σε $a \in \mathbb{R}$ λέμε ότι αποκλίνει

Είναι χρήσιμο να ξεκαθαρίσουμε πότε μια ακολουθία δεν έχει ιδιότητες που έχουμε ορίσει:

→ (a_n) άνω φραγμ. $\iff \exists M>0 : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$.
(a_n) όχι άνω φρ. $\iff \forall M>0 \ \exists n \in \mathbb{N} : a_n > M$.

→ $(a_n) \uparrow \iff \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
$\iff \forall n, m \in \mathbb{N} : n>m$ και $a_m > a_n$
$(a_n) \not\uparrow \iff \exists n, m \in \mathbb{N} : n>m$, αλλά $a_m > a_n$.

→ $a_n \to a \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ |a_n - a| < \varepsilon$

$a_n \not\to a \in \mathbb{R} \iff \exists \varepsilon>0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$

→ $a_n \to +\infty \iff \forall M>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > M$

$a_n \not\to +\infty \iff \exists M>0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : a_n \leq M.$

Εφαρμογές

(1) $a_n = n,\ n \in \mathbb{N}$. Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμ.:

$\forall M>0\ \exists n \in \mathbb{N} : 1/n < 1/M \Rightarrow M < n.$

Άρα

$\forall M>0\ \exists n \in \mathbb{N} : M < a_n.$

(2) $\beta_n = \begin{cases} n, & n=2k \text{ με } k \in \mathbb{N} \\ 0, & n=2k-1 \text{ με } k \in \mathbb{N} \end{cases}$, δηλ:

$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) = (0,2,0,4,0,6,\ldots,0,2k,0,\ldots)$

Τότε η (β_n):

→ Δεν είναι άνω φραγμένη:

$\forall M>0\ \exists n \in \mathbb{N} : n > M \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall M>0\ \exists n \in \mathbb{N} : \beta_{2n} = 2n > M.$

→ Δεν είναι αύξουσα: Έστω $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\exists\ 2k+1,\ 2k \in \mathbb{N} : 2k+1 > 2k$ αλλά $\beta_{2k+1} = 0 < \beta_{2k} = 2k.$

→ Δεν είναι συγκλίνουσα:

Έστω $x \in \mathbb{R}$, τυχαίο. Τότε $\beta_n \not\to x$.

Πράγματι:

$\exists \varepsilon := 1 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : 2n > n > \max\{n_0, x+1\}$

με $x+1 < n < 2n = \beta_{2n}$.

→ Δεν τείνει στο $+\infty$:

$\exists M := 1 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n = 2n_0 - 1 > n_0 :$

$\beta_{2n_0 - 1} = 0 < M.$

ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \to a \iff a_n - a \to 0 \iff |a_n - a| \to 0$

Αποδ.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \quad (a_n \to a)$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |(a_n - a) - 0| < \varepsilon \quad (a_n - a \to 0)$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : ||a_n - a| - 0| < \varepsilon \quad (|a_n - a| \to 0)$ ■

Πόρισμα $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

Παραδ. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \to 0$, διότι $|a_n| = \frac{1}{n} \to 0$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$.

Αποδ.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $a_n \to a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$:

$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$

$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, δηλ.

$|a_n| \to |a|$. ■

SOS! Το αντίστροφο δεν ισχύει: π.χ. $a_n = (-1)^n$:

$|a_n| = 1 \to 1$ αλλά (a_n) αποκλίνει.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \to a,\ b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to a + b$.

Αποδ. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το $\varepsilon/2 > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to a \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2. \\ b_n \to b \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \varepsilon/2 \end{array}\right\} \to$$

$\Rightarrow \exists\, n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq$$
$$\leq |a_n-a| + |b_n-b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Συμπ. Αν $(a_n), (b_n)$ συγκλίνουν $\Rightarrow$

$$\boxed{\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n.}$$

SOS! Μπορεί (a_n+b_n) να συγκλίνει, χωρίς να συγκλίνουν οι (a_n) και (b_n). Π.χ: $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$, οπότε $a_n+b_n = 0 =$ σταθ $\to 0$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ (a_n) φραγμ., $b_n \to 0 \Rightarrow a_n b_n \to 0$
(μηδενική $\times$ φραγμένη $=$ μηδενική).

Απόδ. (a_n) φραγμ. $\Rightarrow \exists\, M>0 : |a_n| < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$
Έστω $\varepsilon>0$. Θέτω $\varepsilon_1 := \varepsilon/M > 0$.
$b_n \to 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |b_n| < \varepsilon_1$

$$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n b_n| \leq M \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Πόρισμα. $a_n \to a$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a_n \to \lambda a$.

[Απόδ. $a_n - a \to 0$ και $b_n = \lambda =$ σταθ. $=$ φραγμ.]

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \to a$ και $b_n \to b \Rightarrow a_n b_n \to ab$.

Απόδ. $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab =$

$$= \underbrace{a_n}_{\text{φρ.}} \underbrace{(b_n - b)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{(a_n - a)}_{\downarrow\, 0} b \longrightarrow 0 + 0.b = 0. \quad \blacksquare$$

Πόρισμα $a_n \to a,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n^k \to a^k.$

Αποδ. Επαγωγικά, εφαρμόζοντας την προηγ. Πρότ:

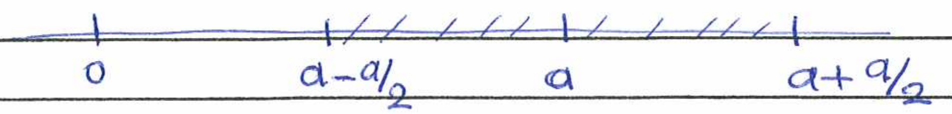
$a_n^2 \to a^2.$

Αν $a_n^k \to a^k \Rightarrow a_n^{k+1} \to a^{k+1}$. ■

$(a_n \to a)$

Λήμμα. $a_n \to a > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > a/2$



Αποδ.

$a > 0 \Rightarrow \varepsilon := a/2 > 0$, οπότε

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n > a - \varepsilon = a/2.$ ■

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \to a,\ b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_n \to b \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

Αποδ.

Έστω ότι $1/b_n \to 1/b$.

Τότε εφαρμόζοντας την τελευταία Πρόταση της σελ. 2, έχουμε

$$a_n/b_n \to a \cdot 1/b = a/b.$$

Άρα αρκεί νδο $1/b_n \to 1/b$.

Πράγματι:

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \to 0 \Leftrightarrow \frac{b-b_n}{b \cdot b_n} \to 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{1}{b}}_{\text{σταθ}} \underbrace{(b_n - b)}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\text{φραγμένη?}} \to 0$$

$$b \neq 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0.$$

$$|b_n| \to |b| \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |b| - \frac{|b|}{2} < |b_n| < |b| + \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \frac{|b|}{2} < |b_n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Αν $M = \max\left\{ \frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \dots, \frac{1}{|b_{n_0-1}|}, \frac{2}{|b|} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ δηλ.}$$

$$\frac{1}{|b_n|} \text{ φραγμένη} \Rightarrow \frac{1}{b_n} \text{ φραγμένη.} \blacksquare$$

SOS! Οι ισότητες

$$\boxed{\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n}$$

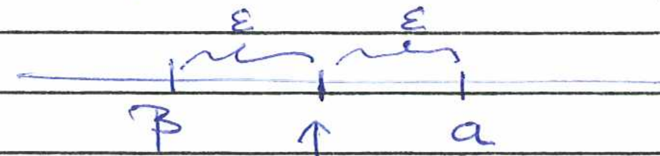
και

$$\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}}, \text{ για } b_n, b \neq 0$$

ισχύουν μόνο αν οι $(a_n), (b_n)$ συγκλίνουν.

ΠΡΟΤ. $a_n \to a$, $\beta_n \to \beta$ και $a_n \leq \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow a \leq \beta$.

Απόδ. Έστω $a > \beta$. Θέτω $\varepsilon := \frac{a-\beta}{2} > 0$.



$\frac{a+\beta}{2} = \beta + \varepsilon = a - \varepsilon$.

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$
$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \quad \beta - \varepsilon < \beta_n < \beta + \varepsilon$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$\beta - \varepsilon < \beta_n < \beta + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

δηλ. $\beta_n < a_n$, άτοπο. ∎

Πόρισμα. $\left.\begin{array}{l} m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ a_n \to a \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq a \leq M.$

ΠΡΟΤ. $a_n \geq 0$ και $a_n \to a$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \longrightarrow \sqrt[k]{a}$

Απόδ.
Παρατηρούμε ότι $a \geq 0$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
(1) $a = 0$
Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το $\varepsilon' := \varepsilon^k > 0$ $\overset{(a_n \to 0)}{\Rightarrow}$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \quad 0 \leq a_n < \varepsilon^k = \varepsilon'$ $\Rightarrow$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \quad 0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$
Άρα
$\sqrt[k]{a_n} \to 0 = \sqrt[k]{a}$.

(2) $a > 0$

Από την ισότητα

$$x^k - y^k = (x-y)\cdot(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-2}x + y^{k-1}),$$

για $x, y \geq 0$ παίρνουμε

$$|x^k - y^k| = |x-y|\cdot \underbrace{(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}\cdot x + y^{k-1})}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq |x-y|\cdot y^{k-1}$$

Άρα:

$$\underset{\downarrow\, 0}{0} \leq \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}\right| \leq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{|a_n - a|}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}}} \xrightarrow{\text{(ισοσυγκλίνουσες)}}$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}\right| \to 0 \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a} \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}. \quad \blacksquare$$

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

Γνωρίζουμε ήδη μια συγκλίνουσα ακολουθία:

$$a_n = 1/n \to 0.$$

ΠΡΟΤ. $a > 1 \Rightarrow a_n = a^n \to +\infty$

Απόδ.

$$a > 1 \Rightarrow a = 1 + \underbrace{(a-1)}_{=\theta} = 1 + \theta, \ \theta > 0 \xrightarrow{\text{(Bernoulli)}}$$

$$\Rightarrow a_n = (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta > n\theta.$$

Από Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$: $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$n_0\theta > M \Rightarrow \forall n \geq n_0 : a_n > n\theta \geq n_0\theta > M \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n \to +\infty. \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $0 < a < 1 \Rightarrow a_n = a^n \longrightarrow 0.$

Απόδ. $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 1+\theta,\ \theta > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a^n} = (1+\theta)^n \geq 1+n\theta > n\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n\theta}} > a_n = a^n > \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \xRightarrow{\text{(ισοσυγκλ.)}} a_n \to 0$ ∎

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a > 0 \Rightarrow a_n = \sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$

Απόδ.
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1+\theta_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a = (1+\theta_n)^n \geq 1+n\theta_n > n\theta_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{a}{n}} > \theta_n > \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0},\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1+\theta_n \to 1+0 = 1.$

(ii) $a = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 = \text{σταθ} \longrightarrow 1.$

(iii) $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{1/a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1.$ ∎

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ $a_n = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1.$

Απόδ

$\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow 0 < \theta_n := \sqrt[n]{n} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq 2: (\sqrt[n]{n})^n = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 >$

$> \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq 2: \frac{2n}{n(n-1)} = \underbrace{\frac{2}{n-1}}_{\downarrow\, 0} > \theta_n^2 > \underbrace{0}_{\downarrow\, 0} \xRightarrow{\text{(ισοσυγκ.)}}$

$\Rightarrow \theta_n^2 \to 0 \Rightarrow \theta_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n} \to 1.$ ∎

Πόρισμα. (1) $\sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n}) \cdot (\sqrt[n]{n}) \to 1 \cdot 1 = 1.$

(2) $1/\sqrt[n]{n} \to 1/1 = 1.$

Παρατ. Στην προηγ. απόδ. χρησιμοποιήθηκε το ότι για $n \geq 2$: $\frac{1}{n-1} \to 0$. Εξηγείστε!

Επέκταση της "άλγεβρας των ορίων" για ακολουθίες που τείνουν στο $\pm\infty$.

1) Πρόσθεση

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ \beta_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + \beta_n \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ \beta_n \to \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \to a_n + \beta_n \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to -\infty \\ \beta_n \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + \beta_n \to -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to -\infty \\ \beta_n \to \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + \beta_n \to -\infty$$

Γράφουμε συμβολικά:

$$\boxed{\begin{array}{c} (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ (+\infty) + \underset{\in\mathbb{R}}{x} = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ (-\infty) + \underset{\in\mathbb{R}}{x} = -\infty \end{array}}$$

Προσοχή! Αν $a_n \to +\infty$ και $\beta_n \to -\infty$, δεν γνωρίζουμε τί κάνει το άθροισμα $a_n + \beta_n$. Π.χ:

(i) $a_n = n$, $\beta_n = -n \Rightarrow a_n + \beta_n = 0 \to 0$.
(ii) $a_n = 2n$, $\beta_n = -n \Rightarrow a_n + \beta_n = n \to +\infty$
(iii) $a_n = n$, $\beta_n = -2n \Rightarrow a_n + \beta_n = -n \to -\infty$

2) Πολλαπλασιασμός

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ \beta_n \to \pm\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n\beta_n \to \pm\infty$$

(ακολουθείται ο κανόνας των προσήμων όπως στα γινόμενα αριθμών).

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ \beta_n \to \beta > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n\beta_n \to \pm\infty$$

(πάλι ακολουθείται ο κανόνας των προσήμων)

Συμβολικά:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty & \\ (-\infty)(\pm\infty) = \mp\infty & \\ & \\ (\pm\infty)\cdot\lambda = \pm\infty & (\lambda>0) \\ (\pm\infty)\cdot\lambda = \mp\infty & (\lambda<0) \end{array}}$$

Προσοχή! Αν $a_n \to \pm\infty$ και $\beta_n \to 0$, δεν γνωρίζουμε τι κάνει το γινόμενο $a_n\beta_n$. Πχ:

(i) $a_n = n$, $\beta_n = 1/n \Rightarrow a_n\beta_n = 1 \to 1$

(ii) $a_n = n^2$, $\beta_n = 1/n \Rightarrow a_n\beta_n = n \to +\infty$

(iii) $a_n = n$, $\beta_n = 1/n^2 \Rightarrow a_n\beta_n = 1/n \to 0$.

3) Αντιστροφή

Εστω (a_n) με $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$a_n \to +\infty \Rightarrow 1/a_n \to 0$

$a_n \to 0 \Rightarrow 1/a_n \to +\infty$

Αντίστοιχα, για $a_n < 0$:

$a_n \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

$a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to -\infty$.

Θα γράφουμε:

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{1}{\pm\infty} = 0 \\ \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty \end{gathered}}$$

4 Επέκταση του Θ. Ισοσυγκλινουσών:

$$\left.\begin{aligned} a_n &\to +\infty \\ a_n &\leq \beta_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta_n \to +\infty$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &\to -\infty \\ \beta_n &\leq a_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta_n \to -\infty.$$