ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

ΘΕΩΡ 1 (Κριτήριο Λόγου / D'Alembert).

Έστω (a_n) με $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε:

(i) Αν $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$.

(ii) Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

Απόδ (i) $\ell > 1 \Rightarrow \varepsilon := \frac{\ell-1}{2} > 0$

$1 \quad \ell-\varepsilon \quad \ell \quad \ell+\varepsilon$

$\frac{\ell+1}{2} = \ell-\varepsilon = 1+\varepsilon.$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell-\varepsilon = \frac{\ell+1}{2} > 1.$

Οπότε:

$a_{n_0+1} > \frac{\ell+1}{2} \cdot a_{n_0}$,

$a_{n_0+2} > \frac{\ell+1}{2} a_{n_0+1} > \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 a_{n_0}$ και, επαγωγικά,

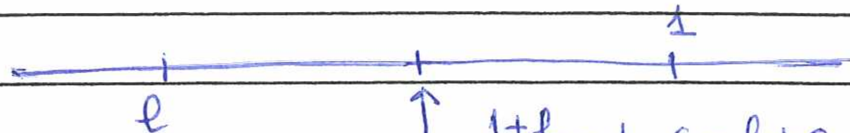
$a_{n_0+k} > \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k \cdot a_{n_0} \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \quad a_n > \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \cdot a_{n_0} =$

$$= \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{-n_0} \cdot a_{n_0}}_{\mathbb{R} \ni x > 0}$$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$

(ii) $\ell < 1 \Rightarrow \varepsilon := \dfrac{1-\ell}{2} > 0.$



$$\frac{1+\ell}{2} = 1-\varepsilon = \ell+\varepsilon.$$

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \ell+\varepsilon < 1$

Οπότε:

$0 < |a_{n_0+1}| < \dfrac{1+\ell}{2} \cdot |a_{n_0}|,$

$0 < |a_{n_0+2}| < \dfrac{1+\ell}{2} \cdot |a_{n_0+1}| < \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^2 \cdot |a_{n_0}|$

και, επαγωγικά, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$0 \leq |a_{n_0+k}| < \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^k \cdot |a_{n_0}|$, ή, ισοδύναμα

$\forall n \geq n_0$:

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} < |a_n| < \underset{\downarrow \atop 0}{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-n_0} \cdot |a_{n_0}|}_{x \in \mathbb{R}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0.$ ■

Προσοχή! Στο (i) αν δεν είναι $a_n > 0$ (αλλά $a_n < 0$), τότε $a_n \to -\infty$.

Επίσης, αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ δεν βγαίνει συμπέρασμα:

π.χ.:

$a_n = 1/n \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1/n+1}{1/n} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \dfrac{1}{1+0} = 1$

με $a_n \to 0$.

$\beta_n = n \to +\infty$, και $\beta_{n+1}/\beta_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1+0 = 1.$

$\gamma_n = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$, και $\gamma_{n+1}/\gamma_n \to 1.$

ΠΡΟΤΑΣΗ

(i) $a_n \geq 0$, $\mu > 1$: $a_{n+1} \geq \mu a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$

(ii) $0 < \mu < 1$, $|a_{n+1}| \leq \mu |a_n|$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \to 0$

Απόδ. Άσκηση!

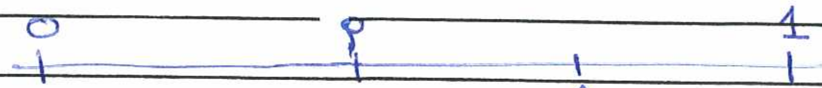
ΘΕΩΡ. 2 (Κριτήριο ρίζας / Cauchy)

Έστω (a_n) με $a_n \geq 0$. Τότε:

(i) $\sqrt[n]{a_n} \to \rho < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

(ii) $\sqrt[n]{a_n} \to \rho > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$.

Απόδ. (i) Για $\rho < 1$, θέτουμε $\varepsilon := \frac{1-\rho}{2} > 0$

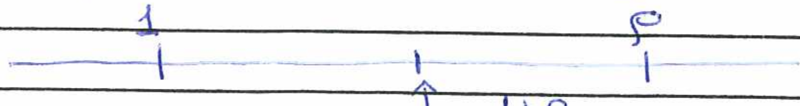


$\frac{1+\rho}{2} = \rho + \varepsilon = 1 - \varepsilon$.

$\sqrt[n]{a_n} \to \rho \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \rho + \varepsilon < 1$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq a_n < \underset{\downarrow \atop 0}{(\rho+\varepsilon)^n} \Rightarrow a_n \to 0$.

(ii) Για $\rho > 1$, θέτουμε $\varepsilon : \frac{\rho - 1}{2} > 0$



$\frac{1+\rho}{2} = 1 + \varepsilon = \rho - \varepsilon$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} > \rho - \varepsilon \Rightarrow a_n > \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$. ∎

<u>Προσοχή!</u> Αν $\rho = 1$, δεν γνωρίζουμε πώς συμπεριφέρεται η (a_n). Πχ:

$a_n = 1/n \to 0$, με $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{1/n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \dfrac{1}{1} = 1$.

$\beta_n = 1 = \text{σταθ}$, με $\sqrt[n]{\beta_n} = \sqrt[n]{1} \to 1$.

$\gamma_n = n \to +\infty$, με $\sqrt[n]{\gamma_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω (a_n) με $a_n \geq 0$.

(i) Αν $\exists\, \rho \in \mathbb{R}$ με $0 < \rho < 1$: $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \to 0$.

(ii) Αν $\exists\, \rho > 1$: $\sqrt[n]{a_n} \geq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \to +\infty$.

<u>Απόδ.</u> Άσκηση!

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Υπενθυμίζουμε ότι:

$(a_n) \uparrow \iff a_{n+1} \geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n) \Uparrow \iff a_{n+1} > a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n) \downarrow \iff a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n) \Downarrow \iff a_{n+1} < a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι:
$(a_n)\uparrow \Leftrightarrow \forall n>m: a_n \geq a_m.$

Πράγματι:
Έστω $(a_n)\uparrow$ και $n>m$. Θδο $a_n \geq a_m$.
Επειδή $n>m \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}: n=m+k$, αρκεί νδο $a_{m+k}\geq a_m$, $\forall k\in\mathbb{N}$.
Με επαγωγή: $a_{n+1}\geq a_n$ (από ορσ.).
Αν $a_{n+k}\geq a_n \Rightarrow a_{n+(k+1)}\geq a_{n+k}\geq a_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{n+(k+1)}\geq a_n.$$

Ανάλογα για (a_n) $\uparrow$, $\downarrow$, $\downarrow$.

Επίσης παρατηρούμε ότι:

$(a_n)\uparrow \Rightarrow (a_n)$ κάτω φραγμ. από a_1.
$(a_n)\downarrow \Rightarrow (a_n)$ άνω φραγμ. από a_1.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$
Κάθε ακολουθία μονότονη και φραγμένη είναι συγκλίνουσα.

Απόδ. Έστω $(a_n)\uparrow$.
Το σύνολο των εικόνων $A=\{a_n: n\in\mathbb{N}\}$ είναι $\neq\emptyset$ και φραγμένο, άρα $\exists \sup A = a\in\mathbb{R}$.
Θδο $a=\lim a_n$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε
$a-\varepsilon<a \Rightarrow a-\varepsilon$ όχι άνω φρ. του $A\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}: a-\varepsilon<a_{n_0}\leq a \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n\geq n_0:$

$$a-\varepsilon<a_{n_0}\leq a_n\leq a<a+\varepsilon.$$

Άρα $a_n\to a$. ∎

Σχέση σύγκλισης – φραγμάτων:

(1) $a_n \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_n)$ φραγμένη
(2) $a_n \to +\infty \Rightarrow (a_n)$ όχι άνω φραγμένη.
(είναι κάτω φραγμ.)
(3) $a_n \to -\infty \Rightarrow (a_n)$ όχι κάτω φραγμ.
(είναι άνω φραγμ.)

Κανένα αντίστροφο δεν ισχύει:
(1) $a_n = (-1)^n$ φραγμ., όχι συγκλίνουσα
(2) $a_n = (0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, \dots)$ όχι άνω φραγμ.,
αλλά $a_n \not\to +\infty$.
(3) $a_n = (0, -2, 0, -4, 0, -6, \dots)$ όχι κάτω φραγμ.,
αλλά $a_n \not\to -\infty$.

Σχέση σύγκλισης – μονοτονίας:

ΟΛΕΣ οι μονότονες συγκλίνουν ή τείνουν:

(4) μονότονη + φραγμένη $\Rightarrow$ συγκλίνει (σε $a \in \mathbb{R}$)
(5) $(a_n)\uparrow$ όχι άνω φραγμ. $\Rightarrow a_n \to +\infty$
(6) $(a_n)\downarrow$ όχι κάτω φραγμ $\Rightarrow a_n \to -\infty$

κανένα αντίστροφο δεν ισχύει:
(4) $(-1)^n \cdot 1/n \to 0$, όχι μονότονη
(5) $(a_n) = (2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \dots) \to +\infty$, όχι $\uparrow$.
(6) $(a_n) = (-2, -1, -4, -3, \dots) \to -\infty$, όχι $\downarrow$.

Σχέση μονοτονίας – φραγμάτων

(7) μονότονη $\Rightarrow$ φραγμ. από μία πλευρά
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Π.χ. $a_n = (-1)^n$.

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ e

Λήμμα Έστω $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\beta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Τότε (1) $(a_n)\uparrow$ και (2) $(\beta_n)\downarrow$

Απόδ.

(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \iff$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \iff$$

$$\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n > \frac{n+1}{n+2} \iff$$

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1} - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}$$

$= (1+a)^n \quad a = -\frac{1}{n^2+2n+1} > -1.$ Bernoulli:

$$\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} = \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \overset{⊛}{\underset{;}{>}} \frac{n+1}{n+2}$$

$$⊛ \iff (n^2+n+1)(n+2) > (n+1)(n^2+2n+1) = (n+1)^3$$

$$\iff n^3+2n^2+n^2+2n+n+2 > n^3+3n^2+3n+1 \iff$$

$$\iff 2 > 1 \quad ✓$$

(2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Longleftrightarrow$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > \frac{n+2}{n+1} \Longleftrightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > \frac{n+2}{n+1}.$$

(Bern) $\Rightarrow 1+\frac{n+1}{n^2+2n} \overset{\circledast}{>} \frac{n+2}{n+1}$;

$\circledast$ $\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} > \frac{n+2}{n+1} \Longleftrightarrow$

$$(n^2+3n+1)(n+1) > (n+2)(n^2+2n) \Longleftrightarrow$$

$$n^3+n^2+3n^2+3n+n+1 > n^3+2n^2+2n^2+4n \Longleftrightarrow$$

$$1 > 0. \quad \blacksquare$$

<u>Πρόταση</u> $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \in \mathbb{R}$ $\quad e := \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

<u>Απόδ.</u> Έχουμε δείξει

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a_n) \uparrow$

Επίσης έχουμε δείξει ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (\beta_n) := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow$

Προφανώς $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>0}{}^{n+1} = \beta_n$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n < \dots \dots < \beta_n < \dots < \beta_3 < \beta_2 < \beta_1$$

$(\alpha_n)\uparrow$ και άνω φρ. από (κάθε β_n, και από) β_1

Άρα συγκλίνει σε αριθμό $\in \mathbb{R}$. Θέτουμε $e := \lim a_n$ ∎

<u>Παρατ:</u> $a_1 < e < \beta_1 \Rightarrow 2 < e < 4$

Υπολογίζεται $e \simeq 2.718$

Επίσης: $\beta_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \beta_n \longrightarrow e \cdot (1+0) = e$

ΑΡΧΗ ΚΙΒΩΤΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

Θεωρ. Έστω $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων. Τότε

$$X := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Αν επιπλέον $b_n - a_n \to 0 \implies X$ μονοσύνολο.

Αποδ. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$

Δηλ $(a_n)\uparrow$ και φραγμ. από $b_1 \implies$

$\exists\ a := \lim a_n \in \mathbb{R}$ $(a = \sup a_n)$

$\exists\ b := \lim b_n \in \mathbb{R}$ $(b = \inf b_n)$

$a_n \leq b_n \implies a \leq b$. Δηλ. $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\boxed{a_n \leq a \leq b \leq b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}}$$

Άρα

$$[a,b] \subseteq [a_n, b_n] \quad \forall n\in\mathbb{N} \implies$$

$$\implies [a,b] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset \quad (1)$$

Αν επιπλέον $\underbrace{b_n - a_n}_{\to\, b-a} \to 0$ $\Big\}$ $\xrightarrow[\text{του ορίου}]{\text{μοναδ.}}$ $a = b \implies$ $[a,b] = \{a\} = \{b\}$.

Θδο $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a,b]$.

Πράγματι: $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n,\ \forall n\in\mathbb{N} \implies$

$$\implies a \leq x \leq b \implies$$

$$\to x \in [a,b].$$

Δηλ. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \subseteq [a,b]$ (2) Άρα $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a,b]$ ∎

Παρατ. Συμπ. ισχύει μόνο για κλειστά διαστήματα:
$(0,1) \supseteq (0,1/2) \supseteq (0,1/3) \supseteq \ldots \supseteq (0,1/n) \supseteq \ldots$
$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,1/n) = \emptyset.$

Πράγματι, αν $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,1/n) \Rightarrow 0 < x < 1/n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n < \frac{1}{x} \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{x}$ άνω φρ. του $\mathbb{N}$, άτοπο.

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Δίνονται με αναδρομικό ορισμό:
$a_1 = a \qquad a_{n+1} = f(a_n)$
(ο ορισμός γίνεται επαγωγικά).

Συνήθως μονότονη + φραγμένη (ή μη φραγμένη.)
Το όριο από εξίσωση.

Παραδείγματα:

(1) $a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

Παρατηρούμε ότι:
$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > a_1, \quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} > a_2$
Έστω $a_{n+1} > a_n$. Θ.δ.ο. $a_{n+2} > a_{n+1}$.
Πράγματι:

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow \underbrace{2+a_{n+1}}_{>0} > \underbrace{2+a_n}_{>0} \Rightarrow \sqrt{2+a_{n+1}} > \sqrt{2+a_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+2} > a_n$. Άρα $(a_n)\uparrow$.

Επίσης παρατηρούμε ότι, αφού η (a_n) είναι μονότονη,

(a_n) φραγμ. $\Leftrightarrow \exists \lim a_n = x \in \mathbb{R}$

(a_n) όχι φραγμ. $\Leftrightarrow a_n \to +\infty$

Ισχύει ότι $a_1 < 2$.

Έστω $a_n < 2 \Rightarrow a_n + 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{2+a_n} < \sqrt{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} < 2$.

Επομένως $0 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, δηλ.

(a_n) φραγμ.

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n} =$

$\Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2 + \lim a_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x = -1}_{\text{απορρ.}}$ ή $x = 2$

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε $a_2 = 3/2 > 1$, $a_3 = 8/5 > 3/2 = a_2$.

Επίσης:

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n+1}{a_n+1} > a_n \Leftrightarrow 2a_n + 1 > a_n^2 + a_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < a_n < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\underset{(a_n > 0)}{\Leftrightarrow} 0 < a_n < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Θδο $0 < a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, επαγωγικά:

για $n=1 \Rightarrow a_1 = 1$ ισχύει.

Έστω $0 < a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$$0 < a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 4a_n+2 < a_n+1+\sqrt{5}a_n+\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (3-\sqrt{5})a_n < \sqrt{5}-2+1 = \sqrt{5}-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < a_n < \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{4} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \checkmark.$$

Άρα $(a_n) \uparrow$ και συγχρόνως (a_n) άνω φρ. από $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\Rightarrow a_n \to x \in \mathbb{R}$$

$$a_{n+1} \nearrow$$

$$x = \frac{2x+1}{x+1} \Rightarrow x^2+x = 2x+1 \Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \blacksquare$$