

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Απειροστικός Λογισμός Ι
Ενδιάμεση Εξέταση - Τμήμα Α. Κατάβολου
10 Ιανουαρίου 2004

Άσκηση 1. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα \sup , \max , \inf και \min των συνόλων

$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}, \quad [0, 1] \cup \left\{3 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}.$$

Άσκηση 2. Αν $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < a\} = a.$$

Άσκηση 3. Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ και τα σύνολα

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < 10^{-6}\} \quad B = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \geq 0\}$$

Να εξετάσετε ποια από τα παραπάνω σύνολα είναι πεπερασμένα και ποια έχουν πεπερασμένο συμπλήρωμα (ως προς το σύνολο των φυσικών αριθμών).

Άσκηση 4. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Για καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν αν είναι αληθής δώστε απόδειξη και αν δεν είναι δώστε αντιπαράδειγμα:

$$(a) a_n \rightarrow a \implies |a_n| \rightarrow |a|$$

$$(b) |a_n| \rightarrow |a| \implies a_n \rightarrow a$$

$$(c) a_n \rightarrow a \implies (a_n) \text{ μονότονη}$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

$$a_n = \frac{2^n + n}{3^n - n}, \quad b_n = \frac{n!}{n^n}$$

Καλή Επιτυχία!