

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Απειροστικός Λογισμός Ι  
Ενδιάμεση Εξέταση  
Διδάσκων Θ. Ζαχαριάδης  
Σάββατο, 10 Ιανουαρίου 2004

**ΘΕΜΑ 1**

- α) Έστω  $A \subset \mathbb{R}$ . Δώστε τον ορισμό του  $\sup A$  και του  $\inf A$ .  
β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα  $\sup$ ,  $\inf$ ,  $\max$ ,  $\min$  των παρακάτω συνόλων:  
 $A = \{6 + \frac{1}{n^2} : n = 1, 2, \dots\}$ ,  $B = \{7 + (-1)^n \frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$ .  
γ) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών  $\alpha_n = \frac{5^n + n}{8^n - 2^n}$  και  $\beta_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$ .

**ΘΕΜΑ 2** Αποδείξτε ότι  $2^n > n^2$ , για κάθε  $n \geq 5$ .

**ΘΕΜΑ 3** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

- α) Αν  $\lim \alpha_n = \alpha$  τότε  $\lim |\alpha_n| = |\alpha|$ .  
β) Αν  $\lim |\alpha_n| = |\alpha|$  τότε  $\lim \alpha_n = \alpha$  ή  $\lim \alpha_n = -\alpha$ .  
γ) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι μονότονη.  
Αιτιολογείστε τον ισχυρισμό σας με απόδειξη στην περίπτωση που θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής και με αντιπαράδειγμα την περίπτωση που θεωρείται ότι η πρόταση είναι ψευδής.

**ΘΕΜΑ 4** Έστω  $(\alpha_n)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε  $\lim \alpha_n = 3$ . Εξετάστε αν τα σύνολα

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < 3,0001\} \text{ και } B = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < 2,999\}$$

είναι πεπερασμένα ή έχουν πεπερασμένο συμπλήρωμα (ως προς το σύνολο των φυσικών αριθμών).

(Αιτιολογείστε τον ισχυρισμό σας)