ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Απειροστικός Λογισμός Ι

Ενδιάμεση Εξέταση - Τμήμα Ν. Παπαναστασίου

10 Ιανουαρίου 2004

Άσκηση 1. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα sup, max, inf και min των συνόλων*

$$A = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$
$$B = \{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \text{ άρτιος } \} \cup \{\frac{1-n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \text{ περιττός } \}.$$

Άσκηση 2. *Αν* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ *άνω φραγμένο, αποδείξτε ότι* $\sup A \in A$.

Άσκηση 3. *Έστω* (α_n) *ακολουθία πραγματικών αριθμών με* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *και τα σύνολα*

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n < 10^{-3}\}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n < 0\}.$$

Να εξετάσετε ποια από τα παραπάνω σύνολα είναι πεπερασμένα και ποια έχουν πεπερασμένο συμπλήρωμα (ως προς το σύνολο των φυσικών αριθμών).

Άσκηση 4. *Έστω* (a_n) *ακολουθία πραγματικών αριθμών.*
(α) Αν $a_n \to 0$ *δείξτε ότι* $|a_n| \to 0$. *Ισχύει το αντίστροφο;*
(β) Αν $a_n \to a$ *και* (a_{k_n}) *υπακολουθία της* (a_n) *δείξτε ότι* $a_{k_n} \to a$.

Άσκηση 5. *(α) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας* $a_n = \dfrac{n^k}{n!}$ $(k \in \mathbb{N})$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ *μη κενό και φραγμένο με* $\sup A = 5$. *Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία* (a_n) *με* $a_n \in A$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ώστε* $a_n \to 5$.

Καλή Επιτυχία!