Τμήμα Μαθηματικών – Πανεπιστήμιο Αθηνών
Απειροστικός Λογισμός Ι
17 Ιανουαρίου 2005

1. (α) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το supremum του συνόλου $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < \alpha\}$ (αιτιολογήστε την απάντηση σας).

(β) Έστω A ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) στοιχείων του A ώστε $\alpha_n \to \sup(A)$.

Δώστε παράδειγμα μη κενού και άνω φραγμένου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: κάθε ακολουθία (α_n) στοιχείων του A με $\alpha_n \to \sup(A)$ είναι τελικά σταθερή.

2. (α) Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n+6}{7}$ για $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

(β) Διατυπώστε και αποδείξτε την αρχή της μεταφοράς για τη συνέχεια συνάρτησης σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της.

3. (α) Δώστε τον ορισμό: πότε λέμε ότι μια ακολουθία (α_n) τείνει στο $+\infty$;

(β) Γράψτε την άρνηση του παραπάνω ορισμού και περιγράψτε την λεκτικά.

(γ) Έστω (α_n) μια ακολουθία με θετικούς όρους. Δείξτε ότι: η (α_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό αν και μόνο αν $\alpha_n \not\to +\infty$ (δεν τείνει στο $+\infty$).

4. (α) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

$$\frac{n^3}{2^n}, \qquad \frac{2n^2}{5n^2+8n+3}, \qquad \sqrt{n+2}-\sqrt{n}.$$

(β) Δίνονται τρεις ακολουθίες (α_n), (β_n) και (γ_n) με την ιδιότητα: $\alpha_n \le \beta_n \le \gamma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι: αν $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = L \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = L$.

5. Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που λαμβάνουν την ίδια μέγιστη τιμή:

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = M = \max_{x\in[0,1]} g(x).$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

6. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $g(x) = \begin{cases} x & \text{, αν } x \text{ ρητός} \\ x+2 & \text{, αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$.
Εξετάστε αν η g είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 5$ και στο σημείο $x_1 = \sqrt{3}$.

7. Δίνονται $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση η οποία είναι ασυνεχής στο 0 και $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 0. Δείξτε ότι: η συνάρτηση γινόμενο $\varphi \cdot \omega$ είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν $\omega(0) = 0$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^2 \text{ημ}\frac{1}{x} & \text{, αν } x \neq 0 \\ \alpha & \text{, αν } x = 0 \end{cases}$.

(α) Βρείτε την τιμή του α για την οποία η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Γι' αυτή την τιμή του α, βρείτε την $f'(x)$ για $x = 0$ και για $x \neq 0$.

(γ) Για την ίδια τιμή του α, εξετάστε αν η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Να απαντήσετε και στα οκτώ θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας, κυκλώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε. Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία