ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2005–06)

Ενδιάμεση Εξέταση – 3 Δεκεμβρίου 2005

1. (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα sup, inf, max και min του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n : \ n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

(β) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$. Δείξτε ότι:

(i) Το A είναι άνω φραγμένο και το B είναι κάτω φραγμένο.

(ii) $\sup A \leq \inf B$.

(2 μον.)

2. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε πλήρως ότι:

(i) Αν η (a_n) είναι άνω φραγμένη, τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(ii) Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(3 μον.)

3. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

(α) Αν μια ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα, τότε κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) είναι αύξουσα.

(β) Αν οι υπακολουθίες (a_{2n}) και (a_{2n-1}) μιας ακολουθίας (a_n) συγκλίνουν, τότε η (a_n) συγκλίνει.

(γ) Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος όροι $a_n > M$, τότε $a_n \to +\infty$.

(3 μον.)

4. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{\frac{3n+2}{2n+5}}, \qquad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \qquad \gamma_n = \frac{n!}{n^n}.$$

(2 μον.)

5. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ $(n \geq 1)$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι μονότονη, εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριο της.

(2 μον.)

Καλή Επιτυχία!