ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2005-06)

Τελική Εξέταση – 16 Ιανουαρίου 2006

1. (α) Έστω A, B δύο μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $A \subseteq B$, τότε $\sup A \leq \sup B$.

(β) Έστω A άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω α ένα άνω φράγμα του A. Δείξτε ότι: $\alpha = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (α_n) στοιχείων του A ώστε $\alpha_n \to \alpha$.

(1,5μ)

2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$\alpha_n = \frac{n^2}{2^n}\,, \quad \beta_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\,, \quad \gamma_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n .$$

(1,5μ)

3. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

(β) Έστω (α_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν η (α_n) δεν τείνει στο $+\infty$, τότε η (α_n) έχει φραγμένη υπακολουθία.

(γ) Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία (ακολουθία Cauchy) στο $(0,1)$, τότε η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία (ακολουθία Cauchy).

(2μ)

4. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και ότι $f(x_0) > 0$. Αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $M > 0$ ώστε: για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $0 < f(x) < M$.

(1μ)

5. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x) = 1 - x$ για κάθε ρητό $x \in (0,1)$. Να βρεθεί το $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(1,5μ)

6. Έστω $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $\rho \in (0,1)$ υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $f(\xi) = \rho$.

(1,5μ)

7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n \in [a,b]$ ώστε $f(x_n) \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

(1,5μ)

8. (α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(β) Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| \sin x$.

(1,5μ)

---

(1) Αν συμμετείχατε στην ενδιάμεση εξέταση, να το δηλώσετε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας.

(2) Σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).

(3) Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!