ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2005-06)

27 Σεπτεμβρίου 2006

1. (α) Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A = \inf B$, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

(β) Δείξτε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ τότε υπάρχει άρρητος γ ώστε $x < \gamma < y$ (θεωρήστε γνωστό το αντίστοιχο αποτέλεσμα για ρητό γ).

(1,5μ)

2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$\alpha_n = \frac{\eta\mu\, n}{n}\,, \quad \beta_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}\,, \quad \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\,.$$

(1,5μ)

3. (α) Δείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Έστω (α_n) αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{R}$ και υπακολουθία (α_{k_n}) της (α_n) ώστε $\alpha_{k_n} \to \alpha$. Δείξτε ότι $\alpha_n \to \alpha$.

(1.5μ)

4. Αν (α_n) είναι φραγμένη ακολουθία με την ιδιότητα: όλες οι συγκλίνουσες υπακολουθίες της να συγκλίνουν στον αριθμό $\omega = 10$, δείξτε τότε ότι $\alpha_n \to 10$.

(1,5μ)

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $f(x) \geq \xi$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Ισχύει το συμπέρασμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[a, b]$ με το διάστημα $(a, b]$;

(1,5μ)

6. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$ δείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geq 0$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(1,5μ)

7. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

(β) Σωστό ή λάθος; Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο 0 και ασυνεχής σε κάθε άλλο σημείο (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(1,5μ)

8. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-1)^2 g(x)$. Δείξτε ότι:

(α) η f είναι συνεχής στο σημείο 1.

(β) η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 1.

(γ) η $f''(1)$ μπορεί να μην υπάρχει (δώστε παράδειγμα).

(1,5μ)

---

(1) Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).

(2) Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!