# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2006-07)

Ενδιάμεση Εξέταση – 9 Δεκεμβρίου 2006

**1.** (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα sup, inf, max και min του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n : n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

(β) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το supremum του συνόλου $B = \{q \in \mathbb{Q} : q < \alpha\}$ (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(γ) Για το σύνολο $B$ του ερωτήματος (β) δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(q_n)$ στοιχείων του $B$ ώστε $q_n \to \alpha$.

**(1+1+1μ)**

**2.** Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$\alpha_n = \frac{3^n}{n!}, \quad \beta_n = \frac{2n-1}{3n+2}, \quad \gamma_n = n - \sqrt{n^2 - n}, \quad \delta_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

**(3μ)**

**3.** (α) Έστω $(k_n)$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Δείξτε ότι $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n)$ με $\alpha_1 = 0$ και

$$\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2 + 1}{2\alpha_n + 2}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Δείξτε ότι:

(i) Η $(\alpha_n)$ είναι αύξουσα.

(ii) $\alpha_n \to 1$.

**(1+2μ)**

**4.** (α) Δώστε τον ορισμό: πότε λέμε ότι μια ακολουθία $(\alpha_n)$ τείνει στο $+\infty$; Γράψτε την άρνηση του ορισμού.

(β) Δείξτε ότι: αν μια ακολουθία συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, τότε είναι φραγμένη.

(γ) Δώστε παράδειγμα δύο ακολουθιών $(x_n)$, $(y_n)$ με θετικούς όρους, οι οποίες ικανοποιούν τα εξής:

(i) $x_n \to +\infty$ και $y_n \to +\infty$.

(ii) Η ακολουθία $\frac{x_n}{y_n}$ είναι φραγμένη, αλλά δεν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

**(1+1+1μ)**

**Καλή επιτυχία!**