ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2006–07)

29 Ιουνίου 2007

1. (α) Δείξτε ότι το σύνολο $A = \left\{(-1)^n \left(3 - \frac{1}{n^2}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Έχει το A μέγιστο στοιχείο; ελάχιστο στοιχείο; (αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας).

(β) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $B \subseteq A$ και ότι ισχύει το εξής: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a \leq b$. Δείξτε ότι $\sup A = \sup B$.

(2μ)

2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$\alpha_n = (\sqrt[n]{10} - 1)^n\ , \quad \beta_n = \frac{n^6}{6^n}\ , \quad \gamma_n = n^2 \text{ημ}\left(\frac{1}{n^3}\right)\ .$$

(1,5μ)

3. (α) Αποδείξτε πλήρως ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Δείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. *Υπόδειξη*: Δείξτε πρώτα ότι η (y_n) είναι μονότονη.

(2μ)

4. (α) Δώστε παράδειγμα μη φραγμένης ακολουθίας η οποία έχει φραγμένη υπακολουθία.

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω x ένα σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) η οποία συγκλίνει στο x.

(1.5μ)

5. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε ρητό $x \in (0,1)$ ισχύει $f(x) = x^2$. Να βρεθεί το $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(1μ)

6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $x_1, x_2 \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(x_1)}{4} + \frac{3f(x_2)}{4}.$$

(1μ)

7. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [0,+\infty)$ με $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

(1,5μ)

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ημ}\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και εξετάστε αν η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\xi \in (0,\varepsilon)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

(2μ)

---

(1) Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).

(2) Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

(3) Μπορείτε να γράψετε όσα θέματα θέλετε. Όποιος συγκεντρώσει συνολική βαθμολογία πάνω από 10, βαθμολογείται με 10.

Καλή επιτυχία!