ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2006–07)

7 Σεπτεμβρίου 2007

1. (α) Έστω $A = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\sup A$ και $\inf A$. Έχει το A μέγιστο στοιχείο; ελάχιστο στοιχείο; (αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας).

(β) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $B \subseteq A$ και ότι ισχύει το εξής: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $|a - b| < \varepsilon$. Δείξτε ότι $\sup A = \sup B$.

(2μ)

2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες, βρείτε το όριο, αν υπάρχει:

$$\alpha_n = \frac{n^2}{3n^2 + n + 1}\ , \quad \beta_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}\ , \quad \gamma_n = \frac{\text{συν}(n^3)}{\sqrt{n}}\ .$$

(1,5μ)

3. (α) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριο της.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n + 3}{5}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

(1.5μ)

4. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ και $b_n \to +\infty$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > \delta$.

(β) Δείξτε ότι $a_n b_n \to +\infty$.

(1.5μ)

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(1μ)

6. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $|f(y)| \leq \frac{|f(x)|}{2}$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = 0$.

(1.5μ)

7. (α) Δώστε παράδειγμα φραγμένης συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ να μην υπάρχει.

(β) Αν f είναι συνάρτηση όπως στο ερώτημα (α), εξετάστε αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 - x)f(x)$.

(1,5μ)

8. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, αποδείξτε πλήρως ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

(β) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $x_0 = 0$.

(1.5μ)

---

(1) Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).

(2) Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!