ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2007–08)

Ενδιάμεση Εξέταση – 1 Δεκεμβρίου 2007

1. (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα sup, inf, max και min των συνόλων

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : |x| < \sqrt{2}\} \quad \text{και}$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right] = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right] \cup \dots$$

(β) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$. Δείξτε ότι το A είναι άνω φραγμένο, το B είναι κάτω φραγμένο και $\sup A \leq \inf B$.

(3μ)

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $A = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$. Το A είναι μη κενό ($0 \in A$) άνω φραγμένο από τον $\sqrt{2}$ και κάτω φραγμένο από τον $-\sqrt{2}$. Άρα, υπάρχουν τα $\sup A$ και $\inf A$.

$\sup A = \sqrt{2}$: έστω $s = \sup A$. Αφού $0 \in A$ έχουμε $0 \leq s$. Αφού ο $\sqrt{2}$ είναι άνω φράγμα του A, $s \leq \sqrt{2}$. Υποθέτουμε ότι $s < \sqrt{2}$. Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $s < q < \sqrt{2}$. Τότε, $-\sqrt{2} < 0 \leq s < q < \sqrt{2}$, άρα $q \in A$. Άτοπο, αφού ο s είναι άνω φράγμα του A.

Το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο: αν είχε, αυτό θα ήταν ίσο με το $\sup A = \sqrt{2}$. Όμως, $\sqrt{2} \notin A$ (από τον ορισμό του A, κάθε στοιχείο του A είναι μικρότερο από $\sqrt{2}$ – επίσης, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Όμοια δείχνουμε ότι $\inf A = -\sqrt{2}$ και ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(β) Αν $x \in B$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n-1} \leq 1$. Συνεπώς, $B \subseteq (0, 1]$. Δηλαδή, $0 \notin B$, ο 0 είναι κάτω φράγμα του B, ο 1 είναι άνω φράγμα του B.

Παρατηρούμε ότι $1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, άρα $1 \in B$. Έπεται ότι ο 1 είναι το μέγιστο στοιχείο του B. Ειδικότερα, $\sup B = 1$.

Επίσης, $\inf B = 0$: ο 0 είναι κάτω φράγμα του B και, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in B$ ώστε $x < \varepsilon$ (πάρτε $x = \frac{1}{2n}$ για n αρκετά μεγάλο). Από τον ε-χαρακτηρισμό του infimum έπεται ότι $\inf B = 0$. Αφού $0 \notin B$, το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες βρείτε το όριο, αν υπάρχει:

$$a_n = \sqrt{(n^4 + n)} - n^2, \quad \beta_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \quad \gamma_n = \frac{n^n}{5^n \cdot n!}, \quad \delta_n = \frac{\text{συν}(n^2+1)}{\sqrt{n}}.$$

(3μ)

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$a_n = \frac{(n^4 + n) - n^4}{\sqrt{n^4 + n} + n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} + 1} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

(β) Έχουμε $3^n \leq 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$. Άρα, $3 \leq \beta_n \leq 3\sqrt[n]{2}$. Αφού $\sqrt[n]{2} \to 1$, από το κριτήριο παρεμβολής βλέπουμε ότι $\beta_n \to 3$.

(γ) Γράφουμε

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)!} \frac{5^n n!}{n^n} = \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{e}{5} < 1.$$

Από το κριτήριο του λόγου, $\gamma_n \to 0$.

(δ) Αφού $|\text{συν}(n^2+1)| \leq 1$, έχουμε $0 \leq |\delta_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Όμως, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, άρα $|\delta_n| \to 0$, άρα $\delta_n \to 0$.

3. (α) Αν $a_n \to 0$, είναι αλήθεια ότι η ακολουθία $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα; (Πλήρης δικαιολόγηση.)

(β) Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 2$ και

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

(i) Δείξτε ότι $a_n > \sqrt{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα.

(iii) Να συμπεράνετε ότι η (a_n) συγκλίνει και να βρείτε το όριο της.

(1+2μ)

Υπόδειξη. (α) Λάθος: για παράδειγμα, αν $a_n = 0$ για n περιττό και $a_n = \frac{1}{n}$ για n άρτιο, έχουμε $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n, οπότε $a_n \to 0$, όμως η $|a_n| = a_n$ δεν είναι μονότονη (γράψτε τους πρώτους όρους της: $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots$).

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι $a_n > 0$ για κάθε n. Δείχνουμε ότι $a_n > \sqrt{2}$ με επαγωγή. Έχουμε $a_1 = 2 > \sqrt{2}$ και αν $a_n > \sqrt{2}$ τότε

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} > 0.$$

Για τη μονοτονία,

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} > 0$$

αφού $a_n^2 > 2$.

Η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{2}$, άρα συγκλίνει σε κάποιον $x \geq \sqrt{2}$. Αφήνοντας το $n \to \infty$ στην αναδρομική σχέση, βλέπουμε ότι ο x ικανοποιεί την εξίσωση

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

δηλαδή, $x^2 = 2$. Έπεται ότι $x = \sqrt{2}$.

4. (α) Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε

(ι) $\lim_n a_n = 0$ και

(ιι) για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $|b_n - a_n| < \epsilon$.

Δείξτε ότι $\lim_n b_n = 0$.

(β) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax + b$.
Εξετάστε για ποιές τιμές των a και b
(i) η f είναι σταθερή, (ii) η f είναι 1-1, (iii) η f είναι επί.
Βρείτε την f^{-1}, όταν υπάρχει. **(2+1μ)**

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $|b_n - a_n| < \varepsilon/2$.

Αφού $a_n \to 0$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει $|a_n| < \varepsilon/2$.

Τότε, για κάθε $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$|b_n| \leq |b_n - a_n| + |a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

Έπεται ότι $b_n \to 0$.

(β) 1. Έστω ότι η $f(x) = ax + b$ είναι σταθερή. Δηλαδή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $ax + b = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $x = 0$ βλέπουμε ότι $c = b$ και θέτοντας $x = 1$ βλέπουμε ότι $a + b = c = b$, δηλαδή $a = 0$. Αντίστροφα, αν $a = 0$ (και b οποιοδήποτε) είναι προφανές ότι η f είναι σταθερή.

2. Έστω ότι η $f(x) = ax + b$ είναι $1 - 1$. Τότε, $f(0) \neq f(1)$, άρα $b \neq a + b$, δηλαδή $a \neq 0$. Αντίστροφα, αν $a \neq 0$ (και b οποιοδήποτε) τότε η f είναι 1-1: έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(x) = f(y)$. Τότε, $ax + b = ay + b$, άρα $ax = ay$, άρα $x = y$ (αφού $a \neq 0$).

3. Έστω ότι η $f(x) = ax + b$ είναι επί. Τότε, υπάρχει x ώστε $f(x) = b + 1$, άρα $ax = 1$, άρα $a \neq 0$. Αντίστροφα, αν $a \neq 0$ (και b οποιοδήποτε) τότε η f είναι επί: έστω $y \in \mathbb{R}$. Τότε, $y = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = f\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

4. Αν $a \neq 0$ (και μόνο τότε), η f είναι 1-1 και επί. Άρα, ορίζεται η $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και (από το 3) $f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$.