ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2007-08)

29 Ιανουαρίου 2008

1. (1.5μ) (α) Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A = \inf B$, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω n θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $\left|x - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n}$.

Απάντηση. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό του supremum υπάρχει $a \in A$ ώστε $\sup A < a + \frac{\varepsilon}{2}$ και από τον χαρακτηρισμό του infimum υπάρχει $b \in B$ ώστε $b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$. Αφού $\sup A = \inf B$, συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες έχουμε $b < \sup A + \frac{\varepsilon}{2} < a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = a + \varepsilon$. Δηλαδή, $b < a + \varepsilon$.

(β) Ισοδύναμα, ζητάμε $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $|nx - m| < 1$. Πάρτε τον $m = [nx]$. Τότε, $m \leq nx < m + 1$ άρα $0 \leq nx - m < 1$. Συνεπώς, $|nx - m| < 1$.

2. (1.5μ) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες, βρείτε το όριο, αν υπάρχει:

$$\alpha_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad \beta_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \qquad \gamma_n = n\,\text{ημ}\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Απάντηση. (α) Για την α_n χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου: μετά από απλοποιήσεις,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1,$$

άρα $\alpha_n \to 0$.

(β) Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συζυγή παράσταση παίρνουμε

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \to 0.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την $|\sin x| \leq |x|$ για $x = 1/n^2$ παίρνουμε

$$|\gamma_n| \leq n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Άρα, $|\gamma_n| \to 0$. Έπεται ότι $\gamma_n \to 0$.

3. (1.5μ) Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = \sqrt{2}$ και $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, n = 1, 2, 3, \ldots$.

(i) Δείξτε ότι όλοι οι όροι της (a_n) είναι άρρητοι.

(ii) Δείξτε ότι η (a_n) είναι μονότονη και φραγμένη.

(iii) Να αποδείξετε ότι η (a_n) συγκλίνει και να βρείτε το όριό της.

Απάντηση. (i) Με επαγωγή: ο $a_1 = \sqrt{2}$ είναι άρρητος. Έστω ότι ο a_n είναι άρρητος. Δείχνουμε ότι ο a_{n+1} είναι άρρητος: αν ήταν ρητός, από την $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ θα είχαμε $a_n = a_{n+1}^2 - 2 \in \mathbb{Q}$, άτοπο.

(ii) Παρατηρούμε πρώτα ότι $a_n > 0$ για κάθε n. Δείχνουμε με επαγωγή ότι η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον 2.

(iii) Από το προηγούμενο ερώτημα και από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to x$. Παίρνοντας όρια στην αναδρομική σχέση βλέπουμε ότι $x = \sqrt{2 + x}$ δηλαδή $x^2 - x - 2 = 0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι: 2 και -1. Αφού η ακολουθία έχει όρους μεγαλύτερους από $\sqrt{2}$, συμπεραίνουμε ότι $a_n \to 2$.

4. (1μ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(a) = 0$ και $f(b) = 1$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Η f είναι αύξουσα.

(ii) Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$.

(iii) Υπάρχει $x \in (a,b)$ ώστε $f(x) = \frac{1}{2}$.

Απάντηση. Οι πρώτες δύο προτάσεις είναι ψευδείς: Για παράδειγμα, θεωρήστε την εξής συνάρτηση $f : [0,2] \to \mathbb{R}$: γραμμική στο $[0,1]$ με $f(x) = 2x$ και γραμμική στο $[1,2]$ με $f(x) = 3-x$. Ελέγξτε ότι η f είναι συνεχής, $f(0) = 0$ και $f(2) = 1$. Η f δεν είναι αύξουσα (είναι φθίνουσα στο $[1,2]$) και το σύνολο τιμών της είναι το $[0,2]$.

Η τρίτη πρόταση είναι αληθής: απλή εφαρμογή του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

5. (1.5μ) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\max(f) = \max(g)$. Δηλαδή,

$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\} = \max\{g(y) : y \in [a,b]\}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Απάντηση. Η f και η g παίρνουν την ίδια μέγιστη τιμή M: υπάρχει $x_1 \in [a,b]$ ώστε $f(x_1) = M \geq f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και υπάρχει $y_1 \in [a,b]$ ώστε $g(y_1) = M \geq g(y)$ για κάθε $y \in [a,b]$.

Θεωρήστε την $h = f - g$ στο $[a,b]$. Παρατηρήστε ότι $h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \geq 0$ και $h(y_1) = f(y_1) - g(y_1) = f(y_1) - M \leq 0$.

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η h μηδενίζεται σε κάποιο σημείο ξ του διαστήματος που έχει άκρα τα x_1, y_1. Έπεται ότι $\xi \in [a,b]$ και $f(\xi) = g(\xi)$.

6. (1.5μ) (α) Δείξτε ότι: αν $0 < x < 1$ τότε η ακολουθία x^{2^n} (με όρους x^2, x^4, x^8, x^{16} κλπ) συγκλίνει στο 0.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) = f(x^2)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Απάντηση. (α) Γίνεται με διάφορους τρόπους: για παράδειγμα, αφού $2^n > n$ και $0 < x < 1$, έχουμε $0 < x^{2^n} < x^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Γνωρίζουμε ότι $x^n \to 0$, άρα $x^{2^n} \to 0$ από το κριτήριο παρεμβολής.

(β) Από την υπόθεση, αν $0 < x < 1$ έχουμε $f(x) = f(x^2) = f(x^4) = \cdots = f(x^{2^n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το πρώτο ερώτημα $x^{2^n} \to 0$ και, αφού η f είναι συνεχής, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x^{2^n}) \to f(0)$. Όμως, η ακολουθία $(f(x^{2^n}))$ είναι σταθερή με όλους τους όρους της ίσους με $f(x)$. Συνεπώς, $f(x) = f(0)$.

Έχουμε δει ότι $f(x) = f(0)$ για κάθε $0 \leq x < 1$. Λόγω συνέχειας στο σημείο 1, συμπεραίνουμε ότι $f(1) = f(0)$ (θεωρήστε (y_n) στο $(0,1)$ με $y_n \to 1$ και χρησιμοποιήστε την αρχή της μεταφοράς).

Άρα, $f(x) = f(0)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

7. (2μ) (α) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}[x]$ (με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x).

(β) Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{αν } x \geq 2 \\ ax+b\,, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$ είναι: (i) συνεχής στο $\mathbb{R}$, (ii) παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση. (α) Για το πρώτο όριο, από τον ορισμό του ακεραίου μέρους έχουμε

$$1 - x = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq x \cdot \frac{1}{x} = 1,$$

και το κριτήριο παρεμβολής δείχνει ότι $\lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. Για το δεύτερο, παρατηρήστε ότι $[x] = 0$ αν $0 < x < 1$, άρα $\frac{1}{x}[x] = 0$ στο $(0,1)$. Έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}[x] = 0$.

(β) Για τη συνέχεια: παίρνοντας πλευρικά όρια στο σημείο 2 βλέπουμε ότι πρέπει και αρκεί να ικανοποιείται η $2a + b = 4$ (άπειρες λύσεις της μορφής $(a, 4-2a)$, $a \in \mathbb{R}$).

Για την παραγωγισιμότητα: εκτός από την προηγούμενη συνθήκη, πρέπει να υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{ax + (4-2a) - 4}{x-2} = \ell.$$

Δηλαδή, $\ell = 4$ και $\lim_{x\to 2^-} \frac{a(x-2)}{x-2} = 4$. Έπεται ότι $a = 4$ και $b = -4$.

8. (1.5μ) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $|f'(x)| \leq \sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0.$$

[*Υπόδειξη*. Για $x > 0$, χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[0, x]$.]

Απάντηση. Έστω $x > 0$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_x \in (0, x)$ ώστε $f(x) - f(0) = xf'(\xi_x)$. Έπεται ότι

$$|f(x) - f(0)| = x\,|f'(\xi_x)| \leq x \cdot \sqrt{\xi_x} \leq x\sqrt{x}.$$

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{|f(x)|}{x^2} \leq \frac{|f(0)|}{x^2} + \frac{|f(x) - f(0)|}{x^2} \leq \frac{|f(0)|}{x^2} + \frac{x\sqrt{x}}{x^2}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{|f(x)|}{x^2} \leq \frac{|f(0)|}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0.$$