ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (2007–08)

3 Σεπτεμβρίου 2008

1. (α) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq B$. Αν το A είναι άνω φραγμένο και για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $b \leq a$, δείξτε ότι το B είναι άνω φραγμένο και $\sup B = \sup A$.

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $a_n > 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $a_n \to 0$, δείξτε ότι $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

(2μ)

2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες, βρείτε το όριο, αν υπάρχει:

$$\alpha_n = \frac{n^{200}}{n!}\ , \quad \beta_n = \frac{\text{συν}\,(n!)}{n}\ , \quad \gamma_n = \sqrt{n^2+n} - n\ .$$

(1.5μ)

3. (α) Αποδείξτε πλήρως ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριό της.

(1.5μ)

4. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

(1.5μ)

5. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$. Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

(1.5μ)

6. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $c \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ να ισχύει $f(x) \neq c$.
Αποδείξτε ότι είτε για κάθε $x \in [a, b]$ θα ισχύει $f(x) > c$ είτε για κάθε $x \in [a, b]$ θα ισχύει $f(x) < c$.

(1μ)

7. Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(a) = g(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και $g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι $g(t) \neq 0$ για κάθε $t \in (a, b)$.

(1.5μ)

8. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \text{ημ}\, x.$$

(1.5μ)

---

(1) Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο των αντίστοιχο αριθμό).

(2) Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!