Απειροστικός Λογισμός Ι (2008-09)

Ενδιάμεση Εξέταση – 10 Ιανουαρίου 2009

1. (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{2n} : \ n = 1, 2, \dots \right\} \cup [5, 6].$$

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(β) Έστω $a > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \left\{ k \in \mathbb{N} : \ \frac{k}{n} > a \right\}$ είναι μη κενό και, κατόπιν, δείξτε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}$.

(1.5+1μ)

2. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{5^n}{n!}, \quad \beta_n = (\sqrt[n]{3} - 1)^n, \quad \gamma_n = \frac{\text{συν}(n^2)}{n}, \quad \delta_n = n^2 - \sqrt{n^4 - n}.$$

(2.5μ)

3. (α) Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to +\infty$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι κάτω φραγμένη αλλά δεν είναι άνω φραγμένη.

(1.3+1.2μ)

4. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to \frac{1}{2}$. Δείξτε ότι $[a_n] \to 0$ (με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x).

(β) Έστω $0 \leq a \leq 1$. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 0$ και

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2), \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Δείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{a}$. [*Υπόδειξη*. Μπορείτε, αν θέλετε, να δείξετε πρώτα με επαγωγή ότι $0 \leq a_n \leq \sqrt{a}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$.]

(1+1.5μ)

5. (α) Έστω X μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in X$.

1. Δώστε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας της f στο x_0 και γράψτε αυστηρά τι σημαίνει η πρόταση «η f δεν είναι συνεχής στο x_0» (την άρνηση του ορισμού).
2. Δείξτε ότι: αν η f είναι ασυνεχής στο x_0 τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X ώστε $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

(β) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $|g|$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ενώ η g να είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(2+1μ)

Καλή επιτυχία!