Απειροστικός Λογισμός Ι (2008-09)

16 Σεπτεμβρίου 2009

1. (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} : n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(β) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $b < a$. Δείξτε ότι το B είναι άνω φραγμένο, το A είναι κάτω φραγμένο και $\sup B \leq \inf A$.

(1.5μ)

2. (α) Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{\text{συν}(n!)}{n}, \quad \beta_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $|\text{ημ}(nx)| \leq n\,|\text{ημ}x|$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

(1.5+0.5μ)

3. (α) Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τυχόν $x_1 \in [0,1]$ και ορίζουμε ακολουθία (x_n) στο $[0,1]$ μέσω της αναδρομικής σχέσης $x_{n+1} = f(x_n)$. Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $\xi \in [0,1]$ το οποίο ικανοποιεί την $f(\xi) = \xi$.

(2μ)

4. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$.

(1μ)

5. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

(β) Έστω $n \geq 1$ και $a_1, \dots, a_n \in [0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0,1]$ με την ιδιότητα

$$|x - a_1| + \cdots + |x - a_n| = \frac{n}{2}.$$

(1.5μ)

6. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και εξετάστε αν η συνάρτηση $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, η f δεν είναι μονότονη στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

(2μ)

7. (α) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_{x \to 0} g(x) = \alpha > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |x| < \delta$ τότε $g(x) > 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ και $f''(0) = \alpha > 0$. Δείξτε ότι:

(i) Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $0 < |x| < \delta_1$ τότε $\frac{f'(x)}{x} > 0$.

(ii) Υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $0 < |x| < \delta_2$ τότε $f(x) > 0$.

(2μ)

Καλή επιτυχία!