Απ. Λογισμός Ι (Ενδιάμεση Εξέταση) 14 Ιανουαρίου 2012

ΟΝΟΜΑ | ΑΜ:

Θ1) Εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας)

α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για το $\sup A = s$ υπάρχει ακολουθία $\alpha_n \in A$ $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha_n \neq s$ $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = s$

β) Έστω $(\beta_n)_n$ ακολουθία θετικών αριθμών και $\beta = \lim_{n\to+\infty} \beta_n$. Το όριο β της ακολουθίας είναι θετικός αριθμός.

γ) Έστω $(\gamma_n)_n$ γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Το $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = +\infty$

δ) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

3,5 μονάδες

Θ2) α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των συνόλων $A = \mathbb{Q} \cap [-1, +\sqrt{2}]$, $B = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1, +\sqrt{2}]$ (πλήρως αιτιολόγηση)

β) Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

3 μονάδες

Θ3) α) Για τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνουν και αν ναι, βρείτε το αντίστοιχο όριο:

$$\alpha_n = \left(\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{20} - 2\right) \operatorname{συν}(5^n + 1)$$

$$\beta_n = (-1)^n \frac{2^n}{n!} \quad \text{και} \quad \gamma_n = \frac{3^n\, n!}{n^n}$$

β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $\delta_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}$

2 μονάδες

Θ4) Έστω X, Y, Z μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $g: X \to Y$, $f: Y \to Z$ δύο συναρτήσεις που είναι 1-1 και επί. Δείξτε ότι η

α) η $f \circ g$ είναι 1-1 και επί, β) ισχύει $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

1,5 μονάδες

Καλή Επιτυχία!