Απειροστικός Λογισμός Ι (Σεπτ. 2012)

Θέμα 1 (2 μονάδες)

Εξετάστε για τον κάθε ένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς, αν είναι σωστός ή λάθος και αιτιολογείστε την απάντησή σας.

α) Αν $A \subseteq \mathbb{Q}$ μη κενό και φραγμένο σύνολο, τότε $\sup A \in \mathbb{Q}$ ή $\inf A \in \mathbb{Q}$

β) Υπάρχει ελάχιστος θετικός ρητός αριθμός.

γ) Αν μια ακολουθία (α_n) συγκλίνει στο 1, τότε και η ακολουθία $(\sqrt[n]{\alpha_n})$ συγκλίνει στο 1.

δ) Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε υπάρχει διάστημα (α, β) στο οποίο είναι μονότονη.

ε) Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ είναι συνεχής, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Θέμα 2 (1,5 μονάδα)

Έστω ακολουθία (α_n) ώστε $\lim \alpha_n = 1$. Θέτουμε

$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < 0{,}99\}$, $A_2 = \{n \in \mathbb{N} : 0{,}99 < \alpha_n < 1{,}0009\}$

$A_3 = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \geq 1\}$, $A_4 = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \geq 1{,}0009\}$.

Για κάθε $j = 1,2,3,4$ εξετάστε ποιοί από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί:

i) Το A_j είναι πεπερασμένο σύνολο, ii) Το $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο σύνολο

iii) Τα δεδομένα δεν είναι αρκετά για να προκύψει το i) ή το ii)

Θέμα 3 (1,5 μονάδα)

α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών:

$$\alpha_n = (-1)^n \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \beta_n = \left(\sqrt[n]{10} - \sqrt[n]{5}\right)^n, \quad \gamma_n = 2^n\left(e^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)$$

β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την (α_n), με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1}{\alpha_n}$ για $n = 1,2,\ldots$

Θέμα 4 (1,5 μονάδα)

α) Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$. $(\alpha < \beta)$

β) Ισχύει το α) αν το πεδίο ορισμού της f είναι της μορφής $(\alpha, \beta]$;

Θέμα 5 (2,5 μονάδες)

α) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $A_{x_0} = \{\varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ώστε $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$. Δείξτε ότι: η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνον αν $A_{x_0} = \emptyset$

β) Έστω $f(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x^2$ αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

i) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής

ii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.

Θέμα 6 (2 μονάδες)

α) Έστω $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής με $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Δείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

β) Για την $g(x) = \sum_{n=1}^{101} (x-n)^2$, δείξτε ότι $g(51) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{51\}$.

Καλή επιτυχία!