# Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού Ι, Ιανουάριος 2013

**Θ. 1** **α)** Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $x < a_m < y$.

**β)** Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο $a = \min \mathbb{N}$. Δείξτε ότι μεταξύ $a$ και $a+1$ δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός. Το ίδιο μεταξύ $n$ και $n+1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**Θ.2** α) Αν $\lim \beta_n = \beta > 0$, δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\beta_n > 0$ για κάθε $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$.

**β)** Έστω $\lim\limits_{n} \gamma_n = 1$. Εξετάστε αν οι ακολουθίες $\delta_n = \gamma_n^n$ και $\varepsilon_n = \sqrt[n]{\gamma_n}$ συγκλίνουν υποχρεωτικά στο 1.

**Θ.3** Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες: $\zeta_n = n!\,\eta\mu\left(\dfrac{1}{n!}\right)$, $\vartheta_n = (\eta\mu\, n)\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$,

$\kappa_n = \dfrac{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$ και η $\lambda_n$ όπου $\lambda_1 = \sqrt{6}$ και $\lambda_{n+1} = \sqrt{6 + \lambda_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.

**Θ.4** **α)** Υπολογίστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\eta\mu\, x}{x}\right)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

**β)** Ορίστε τη συνάρτηση $\tau o\xi\, \varepsilon\varphi : \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, δείξτε ότι παραγωγίζεται παντού και υπολογίστε την παράγωγό της.

**Θ.5** **α)** Διατυπώστε (χωρίς απόδειξη) το θεώρημα του Rolle.

**β)** Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $5\alpha x^4 + 4\beta x^3 + 3\gamma x^2 + 2\delta x = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

**γ)** Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε $g(0) = g(1) = 0$, υποθέτουμε ότι η $f$ παραγωγίζεται στο $[0,1]$ και ότι $g(x) f'(x) + f(x) = 1$ $\forall\, x \in [0,1]$. Δείξτε ότι $f \equiv 1$.

**Θ.6** **α)** Έστω $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ και $A$, $B$ δύο ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που το κάθε ένα τους έχει το $x_0$ σαν σημείο συσσώρευσης. Έστω $h : A \to \mathbb{R}$ και $\omega : B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = h(x)$ αν $x \in A$ και $f(x) = \omega(x)$ αν $x \in B$. Δείξτε ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει και ισούται με $\ell$ αν και μόνον αν και τα δύο όρια $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x)$ υπάρχουν και ισούνται και τα δύο με $\ell$.

**β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = x^2$ αν $x \in Q$ και $F(x) = x^3$ αν $x \in \mathbb{R} \setminus Q$. Εξετάστε σε ποιά σημεία η $F$ είναι συνεχής και σε ποια σημεία η $F$ είναι παραγωγίσιμη.