ΙΟΥΝΙΟΣ 2013 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Θ1 α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο με δύο τουλάχιστον στοιχεία. Δείξτε ότι: $a = \sup A$ ανν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύουν: (i) $x < a+\varepsilon \ \forall x \in A$ και (ii) $a-\varepsilon < x$ για ένα τουλάχιστον $x \in A$.

β) Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πεπερασμένων υποσυνόλων του $[0,1]$ ξένων ανά δύο. Θέτω $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } x \in A_n \\ 0, & \text{αν } x \notin A_n \end{cases}$ $n = 1, 2, \ldots$

Δείξτε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$

Θ2 α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, \pi/2]$ ισχύει $\eta\mu x \geq \frac{2x}{\pi}$

β) Ποιος είναι μεγαλύτερος από τους αριθμούς e^{π} και π^{e}

Θ3 α) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

β) Εάν η $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $|f(x)| = 1$ $x \in [a,b]$ τότε η f είναι σταθερή.

γ) Έστω $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| = |x| \ \forall x \neq 0$. Δείξτε ότι f συνεχής στο 0 ανν $f(0) = 0$

Θ4 α) Κάθε μια από τις ακολουθίες $x_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$, $y_n = 1/(n+1) + \ldots + 1/(2n)$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι αύξουσα; είναι φραγμένη; συγκλίνει;

β) Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \to 0$ τότε και $x_n' = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \to 0$.

Θ5 α) Αν $\mathbb{R} \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supset \ldots$ και $b_n - a_n \to 0$ δείξτε ότι $\exists \xi \in \mathbb{R}$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to\infty} b_n$

β) Δείξτε ότι αν μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ανν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $n > m$ έχουμε $|x_n - x_m| < \varepsilon$

Θ6 α) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι συνεχής στο x_0;

β) Κάθε συνάρτηση συνεχής στο x_0 έχει όριο στο x_0;

γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη;

δ) Η συνάρτηση $f: [1,2] \cup \{4\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x+1$ είναι συνεχής;

ε) Αν $X = \{1, 2, 4\}$ και $f: X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση είναι η f συνεχής;

Απαντήστε σε 5 θέματα