

## ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

02/09/13

ΘΕΜΑ 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας):

(α) Εστω  $A$  μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και έστω ότι  $a \in A$  είναι άνω φράγμα του  $A$ . Τότε  $a = \sup A$ .

(β) Εστω  $(a_n)$  γνησίως αύξουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε υπάρχει  $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  αλλά δεν υπάρχει  $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

ΘΕΜΑ 2. (α) Εστω  $(b_n)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ . Αποδείξτε ότι υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε  $b_n > 0$ , για κάθε  $n \geq n_0$ .

(β) Εστω  $(a_n)$  φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε

$$2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Αποδείξτε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ .

ΘΕΜΑ 3. Για κάθε μία από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$\alpha_n = n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \beta_n = n! \eta\mu\left(\frac{1}{(n+1)!}\right), \quad \gamma_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \delta_n = (-1)^n \frac{n^5}{5^n}.$$

ΘΕΜΑ 4. Εστω  $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}(x)\right)$ ,  $x \in [0, \infty)$ .

(α) Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι φραγμένη συνάρτηση.

(β) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας  $a_n = 5^n\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}(5^n)\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

ΘΕΜΑ 5. Να εξετάσετε σε ποιά σημεία είναι συνεχής και σε ποιά παραγωγίσιμη η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 6. (α) Εστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη και  $\xi \in (a, b)$  σημείο μεγίστου της  $f$  στο  $[a, b]$ . Να αποδειχθεί ότι  $f''(\xi) \leq 0$ .

(β) Εστω  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη, με  $g''(x) + g'(x)g(x) = g(x)$  και  $g(a) = g(b) = 0$ . Αποδείξτε ότι  $g(x) = 0$  για κάθε  $x \in [a, b]$ .

**Να γραφούν 5 από τα 6 θέματα  
Καλή επιτυχία!**