ΘΕΜΑΤΑ Α.Λ.Ι. 31-8-2015

ΘΕΜΑ 1ο (2-μονάδες). (α) Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμώ
ελάχιστο στοιχείο. (β) Αποδείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a υπάρχει γνησίως
σα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ρητών αριθμών η οποία συγκλίνει στο a.

(γ) Υπολογίστε, αν υπάρχουν, το supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο των πα
συνόλων $A=\{\frac{2}{n^2}+5 : n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$, $B_a=\{x\in\mathbb{Q} : x<a\}$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2ο (2-μονάδες) (1) Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ των πρ
τικών αριθμών. Αποδείξτε ότι (i) Αν $\sup A=\inf B$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $a\in A$, $b\in B$
ώστε $b-a<\varepsilon$. (ii) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$ όπου $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$

(2) Αποδείξτε πλήρως ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{3})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 1.

(3) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και προσδιορίστε τα όρια τους αν υπάρχουν, των παρα
ακολουθιών: (i) $a_1=1$ και $a_{n+1}=\frac{5a_n+3}{6}$ για $n\in\mathbb{N}$ (ii) $a_n=\sqrt[n]{a^n+b^n}$, $n\in\mathbb{N}$ για $a>0$, $b>0$.

ΘΕΜΑ 3ο (2-μονάδες) (α) Έστω $X\subseteq\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ και $x_0\in X$. Αποδείξτε πλήρως ότι
τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (i) η f είναι συνεχής στο x_0, (ii) για κάθε μονότονη
ακολουθία $(x_n)\subseteq X$ ώστε $x_n\to x_0$ ισχύει $f(x_n)\to f(x_0)$.

(β) Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις ώστε $|f(x)|\leq|g(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η g είναι
συνεχής στο 0 και $g(0)=0$, αποδείξτε ότι και η f είναι συνεχής στο 0.

(γ) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\,\eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ x & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

ΘΕΜΑ 4ο (2-μονάδες) (α) Έστω $a<b$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση ώστε η f είναι συν
και ο περιορισμός $f|_{(a,b)}:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι αν $f(a)=$
τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

(β) Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $x^2+f^2(x)=1$. Αποδείξτε ότι
$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x\in[-1,1]$ ή $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

ΘΕΜΑ 5ο (2-μονάδες). Υποθέτουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $[a,b]$ (όπου στο
θεωρούμε την πλευρική παράγωγο.

α) Αποδείξτε ότι εάν το minimum της f είναι στο σημείο a τότε $f'(a)\geq0$, και εά
είναι στο b τότε $f'(b)\leq0$.

β) Υποθέτουμε ότι $f'(a)<0$ και $f'(b)>0$. Δείξτε ότι $f'(x)=0$ για κάποιο $x\in($

γ) Αποδείξτε ότι αν $f'(a)<c<f'(b)$, τότε $f'(x)=c$ για κάποιο $x\in(a,b)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-cx$.

ΘΕΜΑ 6ο (2-μονάδες) a) Αν η f είναι διαφορίσιμη στο a και $f'(a)\neq0$, τότε η $|f|$ ε
διαφορίσιμη στο a. β) Αν $f(a)=0$ ισχύει το a); Αιτιολογείστε το ισχυρισμό σας
γ) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και διαφορίσιμη στο $(0,1)$,
$f(x)\in[0,1]$ για κάθε $x\in[0,1]$ και ότι $f'(x)\neq1$, για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι
υπάρχει ακριβώς ένα $x\in[0,1]$ ώστε $f(x)=x$.

Σημείωση: Μπορείτε να ασχοληθείτε με όποιο από τα παραπάνω θε
επιθυμείτε.