ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
02/02/2016

ΘΕΜΑ 1.(2 μονάδες) Εξετάστε για τον καθένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς αν είναι σωστός ή λάθος και αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(i) Αν A είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και περιέχει άπειρα στοιχεία, τότε $\inf A < x < \sup A$, για κάθε $x \in A$.

(ii) Αν A είναι μη-κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή.

(iii) Αν $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0$.

(iv) Αν $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$.

ΘΕΜΑ 2.(2 μονάδες) (i) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα sup, inf, max, min των συνόλων

$$A = \{1+(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n = 1, 2, ...\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ 0 < x^2 - 1 < 4\}$$

(ii) Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Να δειχθεί ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3.(2 μονάδες) Εστω ακολουθία $(\alpha_n)_n$ με $\lim \alpha_n = 6,3$. Θέτουμε

$$A_1 = \{n \in N \ : \ \alpha_n < 6,29\} \qquad A_2 = \{n \in \mathbb{N} \ : \ 6,299 < \alpha_n < 6,4\}$$
$$A_3 = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \alpha_n \geq 6,30001\} \quad A_4 = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \alpha_n \leq 6,3\}$$

Για κάθε $j = 1, 2, 3, 4$ εξετάστε ποιοί από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί:

(i) Το A_j είναι πεπερασμένο σύνολο.

(ii) Το $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο σύνολο.

(iii) Τα δεδομένα δεν είναι αρκετά για να προκύψει το (i) ή το (ii).

ΘΕΜΑ 4.(2 μονάδες) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών

(i) $\alpha_n = \frac{2^n n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ (ii) $\beta_n = \sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$, $n \in \mathbb{N}$

(iii) $(\gamma_n)_n$, όπου $\gamma_1 = 2$, $\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n}{2} + \frac{1}{\gamma_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 5.(2 μονάδες) (i) Εστω $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι φραγμένη στο $(-\infty, a]$.

(ii) Εστω $g(x) = x(\frac{\pi}{2} + \text{τοξεφ}x)$, $x \in (-\infty, 0]$. Να δείξετε ότι η g είναι φραγμένη στο $(-\infty, 0]$.

ΘΕΜΑ 6.(2 μονάδες) (i) Εστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Χρησιμοποιώντας τον ε,δ-ορισμό, να δείξετε ότι η $|f|$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $|f|$ συνεχή, και f ασυνεχή σε κάθε $x_o \in [0, 1]$.

(ii) Εστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1), με $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in [0, 1] : |f'(x_o)| \geq |f(x)|$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

Να γραφούν και τα 6 θέματα
Καλή επιτυχία!