ΘΕΜΑ 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί (αν ναι, δώστε πλήρη απόδειξη, αν όχι, δώστε αντιπαράδειγμα):

(α) Εστω $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. Τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n^n = 1$.

(β) Εστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένα σύνολα με άπειρα στοιχεία, $A, B \neq \emptyset$, με $A \subsetneqq B$. Τότε $\sup A < \sup B$.

(γ) Εστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ άνω φραγμένα σύνολα με $\sup A < \sup B$. Τότε υπάρχει $b \in B$ που είναι άνω φράγμα του συνόλου A.

(δ) Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ και $a, b \in A$ με $f(a) < 0 < f(b)$. Τότε $\exists\, \xi \in A \;:\; f(\xi) = 0$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Αποδείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως φθίνουσας ακολουθίας ρητών αριθμών.

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις ακολουθίες

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{n^n}{n!} \\
\beta_n &= \frac{(-1)^n n}{n+1} \\
\gamma_n &= \sqrt[n]{a^n + b^n}, \qquad \text{όπου } a, b > 0.
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα [0,1].

(β) Εστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$\alpha_n = \eta\mu^n(x) = \underbrace{\eta\mu(\eta\mu(\eta\mu\ldots(\eta\mu}_{n-\text{φορές}}\, x)))$$

συγκλίνει στο 0.

ΘΕΜΑ 4. (α) Διατυπώστε και αποδείξτε την αρχή της μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις.

(β) Εστω $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του (a, b) τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = f'(a).$$

ΘΕΜΑ 5. (α) Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Να δείξετε ότι η f είναι επί του $\mathbb{R}$.

(β) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = x \ln x, \qquad x \in (0, +\infty)$$