Απειροστικός Λογισμός Ι

Ενδιάμεση Εξέταση – 10 Δεκεμβρίου 2016

1. (3 μον.) (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\max$, $\min$, $\sup$ και $\inf$ των παρακάτω υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$A = \left\{ \frac{m}{n^2+m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(β) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $s = \sup A$. Υποθέτουμε ότι $s \notin A$. Αποδείξτε ότι:

(i) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα σημεία $x \in A$ τέτοια ώστε $s - \varepsilon < x < s$.

(ii) υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) σημείων του A τέτοια ώστε $x_n \to s$.

(γ) Έστω μη κενό $B \subset (0, +\infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in B$ υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $y < \frac{x}{2}$. Αποδείξτε ότι $\inf B = 0$.

2. (3 μον.) (α) Αποδείξτε πλήρως ότι: αν $\alpha > 1$ τότε $\sqrt[n]{\alpha} \to 1$.

(β) Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριό της. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}, \qquad b_n = \sqrt[n]{1 + 2^4 + \cdots + n^4}.$$

(γ) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $b > a > 0$. Ορίζουμε δύο ακολουθίες (a_n), (b_n) θέτοντας $a_1 = a$, $b_1 = b$ και

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι: $a_n < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η (a_n) είναι αύξουσα, η (b_n) είναι φθίνουσα, και συμπεράνατε ότι οι (a_n) και (b_n) συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

3. (3 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $g(x) = xf(x)$ είναι συνεχής στο 0.

(β) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\max(f) = \max(g)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(γ) Έστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $f(x^2) = f(x)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

4. (3 μον.) (α) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε $a_n \to +\infty$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f με:

(i) πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και εικόνα (σύνολο τιμών) το $[0, \infty)$,

(ii) πεδίο ορισμού το $(0, 1]$ και εικόνα το $[0, \infty)$,

(iii) πεδίο ορισμού το $(0, 1]$ και εικόνα το $(-\infty, \infty)$.

(γ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $a \leqslant x < b$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $y \in (x, x + \delta) \cap [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) < f(y)$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

Καλή Επιτυχία!

Ενδεικτικές απαντήσεις

1. (α) Για το σύνολο A παρατηρήστε ότι $0 < \frac{m}{n^2+m} < 1$, δηλαδή ο 0 είναι κάτω φράγμα και ο 1 άνω φράγμα του A. Αφού $\frac{1}{n^2+1} \in A$ για κάθε n και $\frac{1}{n^2+1} \to 0$, συμπεραίνουμε ότι $0 = \inf A$. Όμοια, $\frac{m}{1+m} \in A$ για κάθε m και $\frac{m}{1+m} \to 1$, άρα $1 = \sup A$. Αφού $0, 1 \notin A$, το A δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο.

Για το σύνολο B παρατηρήστε αρχικά ότι $\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2}$ για κάθε n και $\frac{1}{2} \in B$, άρα $\frac{1}{2} = \max B = \sup B$. Επίσης, ο 0 είναι κάτω φράγμα του B και $\frac{1}{2^n} \to 0$, άρα $0 = \inf B$. Αφού $0 \notin B$, το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ε-χαρακτηρισμό του supremum υπάρχει $x_1 \in A$ ώστε $s - \varepsilon < x_1 \leqslant s$. Όμως, $s \notin A$, άρα $x_1 \neq s$. Δηλαδή, $s - \varepsilon < x_1 < s$. O x_1 δεν είναι άνω φράγμα του A, άρα υπάρχει $x_2 \in A$ ώστε $s - \varepsilon < x_1 < x_2 < s$. Συνεχίζοντας έτσι μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα

$$s - \varepsilon < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < s.$$

Για το δεύτερο ερώτημα μπορούμε να κάνουμε παρόμοια κατασκευή: στο πρώτο βήμα βρίσκουμε $x_1 \in A$ ώστε $s - 1 < x_1 < s$. O $z_2 := \max\{s - 1/2, x_1\}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, άρα υπάρχει $x_2 \in A$ ώστε $z_2 < x_2 < s$. Ειδικότερα,

$$x_1 < x_2 \qquad \text{και} \qquad s - \frac{1}{2} < x_2 < s.$$

Έστω ότι έχουμε ορίσει $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ στο A ώστε $s - \frac{1}{k} < x_k < s$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. O $z_{n+1} := \max\{s - 1/(n+1), x_n\}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, άρα υπάρχει $x_{n+1} \in A$ ώστε $z_{n+1} < x_{n+1} < s$. Ειδικότερα,

$$x_n < x_{n+1} \qquad \text{και} \qquad s - \frac{1}{n+1} < x_{n+1} < s.$$

Επαγωγικά ορίζεται γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) στο A τέτοια ώστε $s - \frac{1}{n} < x_n < s$ για κάθε n, άρα $x_n \to s$.

(γ) O 0 είναι κάτω φράγμα του B. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ στο B και εφαρμόζοντας την υπόθεση βρίσκουμε $x_2 \in B$ ώστε $x_2 < \frac{x_1}{2}$, κατόπιν $x_3 \in B$ ώστε $x_3 < \frac{x_2}{2} < \frac{x_1}{2^2}$ και ούτω καθεξής. Επαγωγικά ορίζεται (x_n) στο B τέτοια ώστε $x_n < \frac{x_1}{2^{n-1}}$, άρα $x_n \to 0$. Αυτό δείχνει ότι $0 = \inf B$.

2. (α) Αφού $\alpha > 1$ έχουμε $\sqrt[n]{a} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$\theta_n = \sqrt[n]{\alpha} - 1.$$

Παρατηρήστε ότι $\theta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν δείξουμε ότι $\theta_n \to 0$, τότε έχουμε το ζητούμενο: $1 + \theta_n \to 1$.

Αφού $\sqrt[n]{\alpha} = 1 + \theta_n$, μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha = (1 + \theta_n)^n \geqslant 1 + n\theta_n > n\theta_n.$$

Έπεται ότι

$$0 < \theta_n < \frac{\alpha}{n},$$

και από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\theta_n \to 0$. Συνεπώς, $1 + \theta_n \to 1$.

(β) Για την (a_n) παρατηρούμε ότι

$$0 < a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2},$$

και αφού $\frac{n}{(n+1)^2} \to 0$ έπεται ότι $a_n \to 0$.

Για την (b_n) παρατηρούμε ότι

$$1 \leqslant b_n = \sqrt[n]{1 + 2^4 + \cdots + n^4} \leqslant \sqrt[n]{n \cdot n^4} = (\sqrt[n]{n})^5$$

και αφού $\sqrt[n]{n} \to 1$ έπεται ότι $b_n \to 1$.

(γ) Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

1. $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. $a_n \leqslant b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τον αναδρομικό ορισμό (ανεξάρτητα μάλιστα από το ποιοί είναι οι a_n και b_n) έχουμε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leqslant \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}.$$

3. Η (a_n) είναι αύξουσα. Παρατηρήστε ότι $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Η (b_n) είναι φθίνουσα. Παρατηρήστε ότι $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant \frac{2b_n}{2} = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω, η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον b_1, ενώ η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον a_1 (εξηγήστε γιατί). Άρα, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Από την $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ έπεται ότι $b = \frac{a+b}{2}$, δηλαδή $a = b$.

3. (α) Έστω (x_n) ακολουθία με $x_n \to 0$. Αφού η f είναι φραγμένη συνάρτηση, η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι φραγμένη, άρα $g(x_n) = x_n f(x_n) \to 0 = g(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς έπεται ότι η g είναι συνεχής στο 0.

(β) Θέτουμε $d = \max(f) = \max(g)$. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ ώστε $f(x_1) = d = g(x_2)$. Τότε, για τη συνάρτηση $h = f - g$ έχουμε

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = d - g(x_1) \geqslant 0$$

και

$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - d \leqslant 0.$$

Από την $h(x_1)h(x_2) \leqslant 0$ και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $h(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = g(\xi)$.

(γ) Έστω $0 \leqslant x < 1$. Από την υπόθεση βλέπουμε ότι $f(x^{2^n}) = f(x)$ για κάθε n. Όμως, $x^{2^n} \to 0$, άρα $f(x^{2^n}) \to f(0)$ από την αρχή της μεταφοράς. Συνεπώς, $f(x) = f(0)$.

Τέλος, θεωρώντας $x_n \in (0,1)$ με $x_n \to 1$, βλέπουμε ότι $f(1) = \lim f(x_n) = \lim f(0) = f(0)$.

Άρα, $f(x) = f(0)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

4. (α) Έστω $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_{n_0} > M$. Αφού η (a_n) είναι αύξουσα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $a_n \geqslant a_{n_0} > M$. Με βάση τον ορισμό, $a_n \to +\infty$.

(β) Δεν υπάρχει συνεχής $f : [0,1] \to [0,\infty)$ επί. Η εικόνα της f είναι κλειστό διάστημα, άρα δεν μπορεί να είναι το $[0,\infty)$. Η $f : (0,1] \to [0,\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ είναι συνεχής και επί.

Τέλος, η $f : (0,\infty] \to (-\infty,\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής και επί. Παρατηρήστε ότι

$$f\left(\frac{1}{2\pi n + \pi/2}\right) = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$$

και

$$f\left(\frac{1}{2\pi n - \pi/2}\right) = -\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \to -\infty,$$

και εφαρμόστε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για να δείξετε ότι κάθε $\rho \in (-\infty, \infty)$ είναι τιμή της f.

(γ) Έστω ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο $[a, b]$ με $f(x_1) > f(x_2)$. Η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $[x_1, x_2]$, σε κάποιο $t \in [x_1, x_2)$ (δεν μπορεί να έχει μέγιστο στο x_2, διότι $f(x_1) > f(x_2)$). Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $[t, t+\delta) \subset [x_1, x_2]$. Από την υπόθεση, υπάρχει $s \in (t, t+\delta)$ ώστε $f(s) < f(t)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $t \in [x_1, x_2]$ άρα $f(t) \leqslant f(s)$.