Απειροστικός Λογισμός Ι

1 Σεπτεμβρίου 2017

1. (2 μον.) (α) Έστω A μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και s άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $s = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (α_n) σημείων του A τέτοια ώστε $\alpha_n \to s$.

(β) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\max$, $\min$, $\sup$ και $\inf$ των συνόλων

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : 4 < x^2 \leqslant 7\} \qquad \text{και} \qquad B = \left\{ \frac{(-1)^n n}{m^2 + n} : m, n \geqslant 1 \right\}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. (2 μον.) (α) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία (α_n) πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(α) Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριό της. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$\alpha_n = \frac{[\sqrt{2}n]}{n}, \qquad \beta_n = (\sqrt[n]{2n} - 1)^n, \qquad \gamma_n = \frac{2^n n! \cos(n^5)}{n^n}.$$

Με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$.

3. (2 μον.) (α) Θέτουμε $x_1 = 1$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $(x_n)_n$ και αν συγκλίνει προσδιορίστε το όριό της.

(β) Έστω (y_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $y_n \to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $y_k \geqslant y_n$.

4. (2 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $p, q \in \mathbb{Q}$ και $p < q$ τότε $f(p) < f(q)$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα. Είναι η f γνησίως αύξουσα;

5. (2 μον.) (α) Έστω $f, g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι

$$\max\{f(x) : x \in [0, 2]\} = \max\{g(x) : x \in [0, 2]\}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 2]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο $\gamma \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι ένα προς ένα.

6. (2 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη παντού. Εξετάστε αν η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(2x) - f(x)\big) = 0$.

Καλή Επιτυχία!