Απειροστικός Λογισμός Ι – Πρόοδος
25 Νοεμβρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (2.5 μον.)

(α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας.

(β) Εξετάστε με χρήση του ορισμού τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = x^4$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο, και $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $x = \sup(A)$ αν και μόνο αν το x είναι άνω φράγμα του A και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x - \varepsilon < y \leqslant x$.

2. (2.5 μον.)

(α) Να βρεθούν τα sup, inf, max και min (αν αυτά υπάρχουν) των συνόλων

$$A = \left\{2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{και} \quad B = \left\{\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Υποθέτουμε ότι $\sup(A) \notin A$. Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ στο A ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup(A)$.

3. (3 μον.)

(α) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n)!}, \quad \beta_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n, \quad \gamma_n = \frac{1}{n} + (-1)^n, \quad \delta_n = \sin(n^3) \cdot (\sqrt[n]{2n} - 1)^n.$$

(β) Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to 0$. Δείξτε ότι

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to 0.$$

4. (3 μον.)

(α) Έστω $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f(q)| \leqslant |g(q)|$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in [0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in [0,1]$ ώστε

$$f(y) = \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{4}f(x_2) + \frac{1}{8}f(x_3) + \frac{1}{10}f(x_4) + \frac{1}{40}f(x_5).$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!