Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών
Τελική Εξέταση Απειροστικού Λογισμού Ι

Εαρινό Εξάμηνο

22 Ιουνίου 2020
1ο κλιμάκιο

1. (2 μον.) Να βρεθούν όποια από τα sup, inf, max και min των παρακάτω συνόλων υπάρχουν.

$$A = \{2^{-m} + (-1)^n \colon n, m \in \mathbb{N}\} \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} \colon x > 0,\ 2 \leq x^2 - 1 \leq 3\}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Διευκρίνιση: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.)

2. (3 μον.) Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες και όπου υπάρχει το όριο να βρεθεί.

$$a_n = \frac{n!}{(\mathrm{e}n)^n} \qquad b_n = \left(\sqrt[n]{2n} - \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)^n \qquad c_n = \frac{1}{n^3+1} + \frac{2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n}{n^3+n}.$$

3. (1+1.5=2.5 μον.) Εξετάστε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις. Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα αντίστοιχα).

(α) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.

(β) Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to 0$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε η ακολουθία $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

4. (1.5+1=2.5 μον.)

(α) Έστω $f \colon [-1,1] \to [-1,1)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει αριθμός $M < 1$ τέτοιος ώστε $f(x) < M$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

(β) Ισχύει το συμπέρασμα του (α) για συνεχείς $f \colon [-1,1) \to (-1,1)$;

5. (2 μον.) Έστω $f \colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f\left(\sqrt{x^2+1}\right) - f(x)\right] = 0.$$