

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
101. ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

- Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με $2 + \frac{1}{2}$ μονάδες.
- Εντός ενός θέματος, τα προηγούμενα υποερωτήματα, άσχετα αν έχουν απαντηθεί σωστά ή όχι, θεωρούνται δεδομένα για τα επόμενα.
- Να δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

I. 1. Δείξτε ότι

$$n^{n+1} < (n+1)^n, \quad \forall n \in \{1, 2\}, \quad \text{και} \quad n^{n+1} > (n+1)^n, \quad \forall n \in \{3, 4, \dots\}.$$

2. Έστω

$$a_n = \frac{n \sqrt[n]{n}}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

i. Δείξτε ότι

$$a_n < 1, \quad \forall n \in \{1, 2\}, \quad \text{και} \quad a_n > 1, \quad \forall n \in \{3, 4, \dots\}.$$

ii. Δείξτε ότι

$$a_n \rightarrow 1.$$

iii. Αιτιολογείστε γιατί υπάρχει, τόσο το supremum, όσο και το infimum, του $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

iv. Βρείτε το infimum, τόσο του $\{a_n \mid n \in \{3, 4, \dots\}\}$, όσο και του $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

II. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

1. Δείξτε ότι η f είναι άρτια.
2. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.
3. Ελέγξτε την ύπαρξη των $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ και σε περίπτωση καταφατικής απάντησης υπολογίστε τα.

III. Έστω

$$f(x) = x + \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Ελέγξτε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.
2. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
3. Ελέγξτε την f^{-1} ως προς την ύπαρξη, τη μονοτονία, τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.
4. Υπολογίστε την τιμή $(f^{-1})' \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right)$.

IV. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ μη τετριμμένο διάστημα, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$, και σύνολο

$$A = \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \mid a, b \in I \text{ με } a < b \right\}.$$

1. Δείξτε ότι το A είναι καλά ορισμένο ως υποσύνολο του \mathbb{R} .
2. Δείξτε ότι

$$A \subseteq \frac{f'}{g'}(I).$$

3. Δείξτε ότι

$$\forall y \in \frac{f'}{g'}(I), \exists \text{ ακολουθία } (a_n) \text{ εντός του } A, \text{ τ.ω.: } a_n \rightarrow y.$$

4. Δείξτε ότι το A είναι διάστημα.
5. Δείξτε ότι το $\frac{f'}{g'}(I)$ είναι διάστημα.
6. Δείξτε ότι η $\frac{f'}{g'}: I \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα Darboux.