

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

12/06/2024

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $A = (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ και $B = (a, b) \subseteq (0, +\infty)$. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για το B , ώστε να υπάρχουν τα \sup , \inf του συνόλου

$$A/B = \left\{ \frac{x}{y} : x \in A \text{ και } y \in B \right\}.$$

(β) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα \max , \min , \sup , \inf του συνόλου

$$C = \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

ΘΕΜΑ 2. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις ακολουθίες:

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^3}, \quad c_n = \frac{1}{n^3 + 1} + \frac{1}{n^3 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^3 + n^2}$$

ΘΕΜΑ 3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_o \in \mathbb{R}$.

(α) Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί το x_o σε σχέση με το A ώστε να ορίζεται (: να έχει έννοια) το $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x)$; Δώστε τον αντίστοιχο ορισμό.

(β) Ποιά επιπλέον συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί το x_o σε σχέση με το A ώστε να ορίζεται και η συνέχεια της f στο x_o ; Σε αυτή την περίπτωση, πώς συνδέονται η συνέχεια και η ύπαρξη ορίου; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

ΘΕΜΑ 4. Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 5. Να βρείτε ακρότατα, σημεία καμπής και ασύμπτωτες, και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Να γράψετε 4 από τα 5 θέματα

Καλή Επιτυχία !!!