

Απειροστικός Λογισμός 1

Τετάρτη 29 Ιανουαρίου 2025

Ώρα: 09:00–11:00

Θέμα 1. (1+1+1 μον.)

(α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο.

(α1) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A τέτοια ώστε $x_n \rightarrow \sup(A)$.

(α2) Δείξτε ότι αν $\sup(A) \notin A$, τότε η ακολουθία (x_n) στο (α1) μπορεί να επιλεγεί να είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $0 \leq a_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$(1 - a_1) \cdots (1 - a_n) \geq 1 - (a_1 + \cdots + a_n).$$

Θέμα 2. (3 μον.)

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$(i) a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n} \cdot n!}, \quad (ii) d_n = n(-1)^n - \left(n + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$

$$(iii) c_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{n^2}{2}}, \quad (iv) d_n = \frac{n^0}{n!} + \frac{n^1}{(n+1)!} + \frac{n^2}{(n+2)!} \cdots + \frac{n^n}{(2n)!}.$$

Θέμα 3. (3 μον.)

Έστω (a_n) ακολουθία τέτοια ώστε $a_n \rightarrow 0$. Δείξτε ότι

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow 0.$$

Θέμα 4. (2+1 μον.)

(α) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3(2 + \sin(x))$ αν $x \in \mathbb{Q}$, και $f(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

(β) Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^3}$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x^2) - f(x)) = 0.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!